

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

МЕХАНИКА
МУАММОЛАРИ

O‘ZBEKISTON
JURNALI

1
2022

УЗБЕКСКИЙ
ЖУРНАЛ

ПРОБЛЕМЫ
МЕХАНИКИ

Журнал под таким названием издается с января 1992 г.

Ташкент – 2022

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор – докт. физ.-мат. наук, проф. К.С. СУЛТАНОВ
Заместители главного редактора: докт. физ.-мат. наук Р.А. АБИРОВ,
докт. техн. наук З.М. МАЛИКОВ, докт. техн. наук, проф. Д.М. МУХАММАДИЕВ
Ответственный секретарь – PhD Н.А. НИШОНОВ

Члены редколлегии: докт. техн. наук, проф. А. АБДУСАТТАРОВ,
докт. физ.-мат. наук, проф. Р.А. АБДИКАРИМОВ, докт. техн. наук, проф. Ш.П. АЛИМУХАМЕДОВ,
докт. физ.-мат. наук, проф. А.Б. АХМЕДОВ, докт. техн. наук, проф. Г.А. БАХАДИРОВ,
докт. физ.-мат. наук, проф. О.М. ДУСМАТОВ, докт. техн. наук С.И. ИСМОИЛОВА,
докт. физ.-мат. наук, проф. Б.М. МАРДОНОВ, докт. техн. наук, проф., академик М. МИРСАИДОВ,
докт. техн. наук, проф. Р.М. МУРОДОВ, докт. техн. наук, проф. А.А. РИЗАЕВ,
канд. техн. наук Х.С. САГДИЕВ, докт. техн. наук, проф. З. СИРОЖИДДИНОВ,
канд. физ.-мат. наук Ш.М. ТОХИРОВ, докт. техн. наук, проф. М. ТОШБОЛТАЕВ,
докт. техн. наук, проф. А.Т. ТУХТАКУЗИЕВ, канд. техн. наук Р.Р. ХУДАЙКУЛИЕВ,
докт. техн. наук, проф. И.К. ХУЖАЕВ, докт. физ.-мат. наук, проф. Б.Х. ХУЖАЁРОВ,
докт. техн. наук Б.Э. ХУСАНОВ, докт. техн. наук, проф. М. ЭРГАШОВ,
PhD А.С. ЮВМИТОВ, докт. техн. наук, проф. Ш.С. ЮЛДАШЕВ

Адрес редакции:
100125, Ташкент, Академгородок, Дурмон йули, 33.
Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз

Телефон: + 99871 262-78-34
Факс: +99871 262-71-52
E-mail: instmechofficial@gmail.com

Журнал зарегистрирован Агентством по печати и информации Республики Узбекистан 22.12.2006 г.
Регистрационный номер 0050.

Номер одобрен на заседании редакционной коллегии журнала 11.03.2022.
Сдано в набор 16.02.2022. Подписано в печать 11.03.2022.
Формат 60×84 ¹/₈. Гарнитура Times New Roman. Ризография.
Усл.-печ. л. 10.23. Уч.-изд. л. 6.87. Тираж 130. Заказ № 674.
Цена договорная.

Отпечатано в Минитипографии АН РУз:
100047, г. Ташкент, ул. акад. Я. Гулямова, 70.

РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОТЕНЦИАЛАХ НАПРЯЖЕНИЙ

Ахмедов А.Б.

Национальный университет Узбекистана. Ташкент, Узбекистан
E-mail: Ahmedov-1956@mail.ru

Аннотация: В данной статье рассмотрены пространственные задачи теории упругости в напряжениях. С помощью новых функций напряжений система из шести уравнений в напряжениях сведена к решению эквивалентных разрешающих уравнений относительно трех потенциалов тензора напряжений. Выбором базисных функций в виде синуса и косинуса полиномов достигнуто точное удовлетворение всем граничным условиям на боковых гранях параллелепипеда в напряжениях. Решены некоторые прикладные задачи.

Ключевые слова: теория упругости; задача в напряжениях; параллелепипед; потенциал напряжений; взаимно уравновешенные нагрузки; базисные функции; косинус-полиномы; собственные числа.

Введение. Как известно, в инженерных применениях для определения прочности и жесткости элементов конструкций оперируют компонентами тензора напряжений, тогда как классическая постановка пространственных задач теории упругости решается в перемещениях. При этом для определения компонент тензора напряжений в подавляющем большинстве прикладных методов прибегают к численному дифференцированию компонент вектора перемещения, вследствие чего происходит резкое снижение точности полученных численных результатов. Более того, в зависимости от применяемых методов возникают проблемы удовлетворения граничным условиям в напряжениях.

В плоских задачах теории упругости, с использованием функции напряжений Эри, достигается точное удовлетворение уравнениям равновесия. Для определения неизвестного потенциала напряжений используются уравнения совместности деформаций, где функция Эри удовлетворяет бигармоническому уравнению. Таким образом, с применением полуобратного метода Сен-Венана в плоских задачах теории упругости появляется возможность непосредственного исследования напряженно-деформированного состояния произвольных и составных тел [1,2].

Из литературных источников следует, что первые попытки постановки пространственных задач теории упругости в напряжениях предприняты в работах А.Н. Коновалова [3], в которых пространственные уравнения движения с применением операции деформирования записаны в виде шести уравнений в напряжениях, при этом имеется в наличии только три статических граничных уравнения в напряжениях. Здесь налицо некорректность постановки пространственных задач в напряжениях.

В фундаментальной работе Б.Е. Победри [4] предложена новая корректная задача теории упругости в напряжениях. Согласно данной постановке, в качестве граничных условий в напряжениях дополнительно требуется выполнение уравнений равновесия и на границе трехмерного тела. В работе [5] проведено теоретическое исследование вариационной постановки задачи в напряжениях, где сформулированы условия для обеспечения самосопряженности оператора для разрешающего уравнения. В работе Т. Холматова [6] предложен вариационно-разностный метод решения задачи в напряжениях. В [7] вариационно-разностным методом решены задачи о квазистатическом равновесии вязкоупругого параллелепипеда в напряжениях под воздействием взаимно уравновешенных нагрузок, в том числе и сосредоточенных сил.

В последнее время в мире наметилась тенденция по разработке пакетов прикладных программ на основе метода конечных элементов [8], метода гидродинамического сплайна [9] в интегрированной среде ANSYS [10]. Эти подходы позволили решить различные прикладные задачи в неканонических областях деформирования при исследованиях различных

технологических процессов [11]. Вместе с тем, при решении технологических задач с конечной деформацией и перемещением известные подходы иногда дают неудовлетворительные результаты, поскольку все вычислительные операции выполняются над конечными элементами. В этом плане становится перспективным направлением разработка неклассических теорий деформирования различных несущих элементов конструкций сведением трехмерных задач к эквивалентным двумерным задачам. Здесь по одной из координат искомые перемещения разлагаются в ряд [12–16].

Постановка задачи теории упругости в напряжениях. Классическая постановка задачи теории упругости в напряжениях заключается в решении трех уравнений равновесия:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad x \in V, \quad (1)$$

при выполнении трех статических граничных условий

$$\sigma_{ij}n_j|_G = S_i, \quad x \in G, \quad (2)$$

где σ_{ij} – компоненты симметричного тензора напряжений; X_i и S_i – соответственно компоненты массовых и поверхностных сил; n_j – компоненты вектора внешней нормали. При этом, налицо нехватка разрешающих уравнений и граничных условий для корректной постановки задачи в напряжениях. По повторяющимся индексам производится суммирование, индексы принимают значения от 1 до 3. Декартова система координат расположена в геометрическом центре параллелепипеда.

Пользуясь физическими уравнениями состояния между компонентами тензоров напряжений $-\sigma_{ij}$ и деформаций $-\varepsilon_{ij}$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (3)$$

и кинематическими соотношениями между симметричным тензором деформаций и вектором перемещений

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (4)$$

можно получить корректную постановку задачи относительно трех компонент вектора перемещений

$$\Delta u_i + \frac{1}{1-2\nu} u_{k,ki} + X_i = 0, \quad (5)$$

где μ , ν – соответственно модуль сдвига и коэффициент Пуассона; $\Delta f = f_{,kk}$ – оператор Лапласа; δ_{ij} – символы Кронеккера.

Дифференцируя уравнение Ламе по координате x_i и суммируя, получим

$$\Delta u_{k,k} = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} X_{k,k},$$

откуда следует бигармоничный характер компонент вектора перемещения:

$$\Delta \Delta u_i + \Delta \left(X_i - \frac{1}{1-\nu} X_{k,ki} \right) = 0.$$

Нетрудно показать, что для симметричного тензора деформаций (4) выполняется уравнение совместности:

$$\Delta \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{kk,ij} - \varepsilon_{ik,kj} - \varepsilon_{jk,ki} + (\varepsilon_{nk,kn} - \Delta \varepsilon_{nn}) \delta_{ij} = 0. \quad (6)$$

Разрешая уравнения состояния (3) относительно деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (7)$$

и подставляя в (6) с учетом уравнения равновесия, после некоторых выкладок будем иметь систему уравнений Бельтрами–Митчелла в напряжениях:

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} + X_{i,j} + X_{j,i} + \frac{\nu}{1-\nu} X_{k,k} \delta_{ij} = 0. \quad (8)$$

Свертывая полученные уравнения, будем иметь

$$\Delta \sigma_{kk} + \frac{1+\nu}{1-\nu} X_{k,k} = 0, \quad (9)$$

откуда немедленно следует, что симметричный тензор напряжений является бигармонической функцией:

$$\Delta\Delta\sigma_{ij} + \Delta X_{i,j} + \Delta X_{j,i} + \frac{1}{1-\nu} (\nu\Delta X_{k,k} \delta_{ij} - X_{k,kij}) = 0. \quad (10)$$

Дифференцируя систему уравнений Бельтрами–Митчелла (8) по координате x_j

$$\Delta(\sigma_{ij,j} + X_i) = 0, \quad (11)$$

получим гармоничность уравнений равновесия, исходя из чего, требуя выполнения

$$(\sigma_{ij,j} + X_i)|_G = 0, \quad (12)$$

достигается удовлетворение уравнения равновесия по всему объему рассматриваемого объекта. Более того, задача теории упругости в напряжениях, предложенная Б. Е. Победря, становится замкнутой, т.е. для шести компонент симметричного тензора напряжений будем иметь шесть разрешающих уравнений (8) и шесть граничных условий (2) и (12).

Обсуждение подходов решения задач с помощью потенциалов напряжений. Задача о равновесии параллелепипеда под воздействием самоуравновешенных поверхностных нагрузок $\iint_G S_i dG = 0$ при отсутствии массовых сил $X_i = 0$.

Тогда систему дифференциальных уравнений в частных производных (8) можно записать в упрощенном виде:

$$\Delta\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} = 0, \quad (13)$$

Положим, что прямоугольная декартова система координат расположена в центре левого ребра прямоугольного параллелепипеда.

Нормальную, к серединной плоскости параллелепипеда, координату обозначая через z , будем иметь координатную систему Ox_1x_2z . Тогда в индексах тензора напряжений следует ввести замену $3 \rightarrow z$, следовательно, (8) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta\sigma_{ij} + \sigma_{ij,zz} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{kk} + \sigma_{zz}),_{ij} = 0, \\ \Delta\sigma_{zz} + \sigma_{zz,zz} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{kk} + \sigma_{zz}),_{zz} = 0, \\ \Delta\sigma_{iz} + \sigma_{iz,zz} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{kk} + \sigma_{zz}),_{iz} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

На противоположных гранях по нормальной координате z действуют нормальные и касательные нагрузки $-q^\pm(x_1, x_2)$, $g_i^\pm(x_1, x_2)$. Остальные грани свободны от нагрузок.

Тогда соответствующие граничные условия на произвольных гранях параллелепипеда можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \sigma_{zi} = g_i^\pm(x_1, x_2), \\ \sigma_{zz} = q^\pm(x_1, x_2) \\ \sigma_{ij,j} + \sigma_{iz,z} = 0, \\ \sigma_{zz,z} + g_i^\pm(x_1, x_2) = 0, \end{cases} \quad \text{при } z = \pm c \quad (15)$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{1z} = 0, \\ \sigma_{ij,j} + \sigma_{iz,z} = 0, \\ \sigma_{zz,z} + \sigma_{zi,i} = 0, \end{cases} \quad \text{при } x_1 = 0, l_1 \quad (16)$$

$$\begin{cases} \sigma_{21} = 0, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{2z} = 0, \\ \sigma_{ij,j} + \sigma_{iz,z} = 0, \\ \sigma_{zz,z} + \sigma_{zi,i} = 0. \end{cases} \quad \text{при } x_2 = 0, l_2 \quad (17)$$

Предполагая касательные нагрузки потенциальными

$$g_i^\pm(x_1, x_2) = g_{,i}^\pm(x_1, x_2),$$

для компонент тензора напряжений введем потенциалы напряжений: $F_R = F_R(x_1, x_2, z)$ в виде

$$\sigma_{ij} = [F_1 - zF_{A,i}(x_1, x_2) - F_B(x_1, x_2)]_{,ij}, \quad \sigma_{zz} = F_{2,zz}, \quad \sigma_{zi} = F_{3,zi}, \quad (18)$$

подставляя их в систему уравнений (14) и выполняя соответствующие операции интегрирования по соответствующим координатам с точностью до некоторых постоянных интегрирования, будем иметь

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta F_1 + F_{1,zz} + \frac{1}{1+\nu} (\Delta F_1 + F_{2,zz}) = \frac{2+\nu}{1+\nu} \Delta [zF_A(x_1, x_2) + F_B(x_1, x_2)], \\ \Delta F_2 + F_{2,zz} + \frac{1}{1+\nu} (\Delta F_1 + F_{2,zz}) = \\ = \frac{1}{1+\nu} \{ \Delta [zF_A(x_1, x_2) + F_B(x_1, x_2)] + zF_C(x_1, x_2) + F_D(x_1, x_2) \}, \\ \Delta F_3 + F_{3,zz} + \frac{1}{1+\nu} (\Delta F_1 + F_{2,zz}) = \frac{1}{1+\nu} \Delta [zF_A(x_1, x_2) + F_B(x_1, x_2)]. \end{array} \right. \quad (19)$$

Здесь $F_A(x_1, x_2)$, $F_B(x_1, x_2)$, $F_C(x_1, x_2)$, $F_D(x_1, x_2)$ – подлежащие определению неизвестные функции интегрирования. В первом приближении некоторые константы интегрирования принимаются тривиальными, поскольку их наличие в дифференциальных уравнениях для потенциалов не вносит изменения для распределения компонент тензора напряжений. Если положить $F_C(x_1, x_2) = -\Delta F_A(x_1, x_2)$, $F_D(x_1, x_2) = -\Delta F_B(x_1, x_2)$, то второе уравнение (19) становится однородным.

Потенциалы тензора напряжений, разлагая в ряд по базисным функциям, примут вид

$$F_R(x_1, x_2, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{Rnm}(z) \varphi_{nm}(x_1, x_2), \quad (20)$$

где индекс R принимает значения 1, 2, 3, A, B. В спектральном уравнении для Лапласиана

$$\Delta \varphi_{nm} + \gamma_{nm}^2 \varphi_{nm} = 0, \quad (21)$$

В зависимости от характера внешнего воздействия и с целью обеспечения выполнения граничных условий (15)–(17), базисные функции представим в виде косинус - полиномов

$$\varphi_{nm}(x_1, x_2) = \left(\cos \pi n \frac{x_1}{l_1} - \frac{1}{9} \cos 3\pi n \frac{x_1}{l_1} \right) \left(\cos \pi n \frac{x_2}{l_2} - \frac{1}{9} \cos 3\pi n \frac{x_2}{l_2} \right) \quad (22)$$

или синус-полиномов

$$\varphi_{nm}(x_1, x_2) = \left(\sin \pi n \frac{x_1}{l_1} - \frac{1}{3} \sin 3\pi n \frac{x_1}{l_1} \right) \left(\sin \pi n \frac{x_2}{l_2} - \frac{1}{3} \sin 3\pi n \frac{x_2}{l_2} \right). \quad (23)$$

Следует отметить, что базисные функции в виде косинус- и синус- полиномов являются взаимно ортогональными, следовательно, соответствующие бесконечные тригонометрические ряды (20) являются сходящимися. При этом, для определения собственных чисел используем известную формулу Релея–Ритца:

$$\mu_{nm}^2 = - \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \iint_G \Delta \varphi_{kl} \varphi_{nm} dG}{\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \iint_G \varphi_{kl} \varphi_{nm} dG}. \quad (24)$$

В анализируемой задаче, введя в рассмотрение безразмерные координаты

$$x = \frac{x_1}{l_1}, y = \frac{x_2}{l_2}, \quad \xi = \frac{z}{c}$$

для собственных чисел, имеем следующее выражение:

$$\mu_{nm}^2 = a\pi^2 c^2 \left(\frac{n^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} \right), \quad (25)$$

где $a=1$ – коэффициент для синус-полинома; $a=243/500$ – коэффициент для косинус-полинома. Систему разрешающих уравнений (19) по безразмерной координате ξ относительно неизвестных $Z_{inm}(\xi)$ представим в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} Z''_{1nm} - \mu_{nm}^2 \frac{2+\nu}{1+\nu} Z_{1nm} + \frac{1}{1+\nu} Z''_{2nm} = -\frac{2+\nu}{1+\nu} \mu_{nm}^2 (cZ_{Anm}\xi + Z_{Bnm}), \\ Z''_{2nm} - \frac{1+\nu}{2+\nu} \mu_{nm}^2 Z_{2nm} - \frac{1}{2+\nu} \mu_{nm}^2 Z_{1nm} = 0, \\ Z''_{3nm} - \mu_{nm}^2 Z_{3nm} - Z''_{2nm} + \mu_{nm}^2 Z_{2nm} = 0, \end{array} \right. \quad (26)$$

а граничные условия (15)–(17) примут следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z''_{2nm} = q_{nm}^{\pm}, \\ Z''_{3nm} - \mu_{nm}^2 Z_{1nm} = -\mu_{nm}^2 (cZ_{Anm}\xi + Z_{Bnm}), \text{ при } \xi = \pm 1, \\ Z'_{3nm} = g_{nm}^{\pm}, \\ Z'''_{2nm} = \mu_{nm}^2 g_{nm}^{\pm}. \end{array} \right. \quad (27)$$

$$\varphi_{nm,11} = 0, \varphi_{nm,12} = 0, \varphi_{nm,1} = 0, \text{ при } x = 0.1, \quad (28)$$

$$\varphi_{nm,22} = 0, \varphi_{nm,12} = 0, \varphi_{nm,2} = 0, \text{ при } y = 0.1. \quad (29)$$

Общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (26) после соответствующих выкладок можно записать в виде

$$\begin{aligned} Z_{1nm} &= [(U_{1nm} + c\xi V_{1nm})ch\mu_{nm}\xi + (U_{2nm} + c\xi V_{2nm})sh\mu_{nm}\xi] + 2\frac{2+\nu}{\mu_{nm}}c(V_{1nm}sh\mu_{nm}\xi + \\ &V_{2nm}ch\mu_{nm}\xi) + (2+\nu)\frac{cZ_{Anm}\xi + Z_{Bnm}}{\mu_{nm}^2}Z_{2nm} = (U_{1nm} + c\xi V_{1nm})ch\mu_{nm}\xi + (U_{2nm} + \\ &+ c\xi V_{2nm})sh\mu_{nm}\xi - \frac{2+\nu}{1+\nu}\frac{cZ_{Anm}\xi + Z_{Bnm}}{\mu_{nm}^2}, \quad (30) \\ Z_{3nm} &= U_{3nm}ch\mu_{nm}\xi + U_{4nm}sh\mu_{nm}\xi + \xi c(V_{1nm}ch\mu_{nm}\xi + V_{2nm}sh\mu_{nm}\xi) + \\ &+ (2+\nu)\frac{cZ_{Anm}\xi + Z_{Bnm}}{\mu_{nm}^2}. \end{aligned}$$

После точного удовлетворения граничным условиям (27) из (30) будем иметь следующие выражения для искомым функций:

$$\begin{aligned} Z_{1nm} &= \frac{\left(\frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} + \frac{3}{\mu_{nm}}th\mu_{nm}\frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \xi th\mu_{nm}\frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}}\right)N_{nm}^+}{1 - th^2\mu_{nm} + \frac{1}{\mu_{nm}}th\mu_{nm}} - \\ &- \frac{\left(th\mu_{nm}\frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} + \frac{2}{\mu_{nm}}\frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \xi\frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}}\right)T_{nm}^-}{1 - th^2\mu_{nm} + \frac{1}{\mu_{nm}}th\mu_{nm}} + \\ &+ \frac{\left(\frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} + \frac{2}{\mu_{nm}}th\mu_{nm}\frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \xi\frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}}th\mu_{nm}\right)T_{nm}^+}{1 - th^2\mu_{nm} - \frac{1}{\mu_{nm}}th\mu_{nm}} - \\ &- \frac{\left(\frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}}th\mu_{nm} + \frac{3}{\mu_{nm}}\frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \xi\frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}}\right)N_{nm}^-}{1 - th^2\mu_{nm} - \frac{1}{\mu_{nm}}th\mu_{nm}} + \\ &+ 2\frac{2+\nu}{\mu_{nm}} \left[\frac{(N_{nm}^- - T_{nm}^+ th\mu_{nm}) \left(\frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \frac{\nu}{(2+\nu)\left(1 + \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}\right) - \mu_{nm}^2} - \xi th\mu_{nm} \right)}{1 - th^2\mu_{nm} - \frac{1}{\mu_{nm}}th\mu_{nm}} + \right. \\ &\left. + \frac{(T_{nm}^- - N_{nm}^+ th\mu_{nm}) \left(\frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \frac{\nu}{2+\nu - \mu_{nm}^2} \right)}{1 - th^2\mu_{nm} + \frac{1}{\mu_{nm}}th\mu_{nm}} \right], \\ Z_{2nm} &= \frac{\left(\frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} + \frac{3}{\mu_{nm}}th\mu_{nm}\frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \xi th\mu_{nm}\frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}}\right)N_{nm}^+}{1 - th^2\mu_{nm} + \frac{1}{\mu_{nm}}th\mu_{nm}} - \\ &- \frac{\left(th\mu_{nm}\frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} + \frac{2}{\mu_{nm}}\frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \xi\frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}}\right)T_{nm}^-}{1 - th^2\mu_{nm} + \frac{1}{\mu_{nm}}th\mu_{nm}} + \\ &+ \frac{\left(\frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} + \frac{2}{\mu_{nm}}th\mu_{nm}\frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \xi\frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}}th\mu_{nm}\right)T_{nm}^+}{1 - th^2\mu_{nm} - \frac{1}{\mu_{nm}}th\mu_{nm}} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{3nm} = & \frac{\left(\frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} th\mu_{nm} + \frac{3}{\mu_{nm}} \frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \xi \frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} \right) N_{nm}^-}{1 - th^2\mu_{nm} - \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} - \\
& - \frac{2\nu}{(1+\nu)\mu_{nm}} \left[\frac{\frac{th\mu_{nm}\xi}{\mu_{nm}} \frac{T_{nm}^+ th\mu_{nm} - N_{nm}^-}{1 + \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}} \frac{\mu_{nm}^2}{2+\nu} 1 - th^2\mu_{nm} - \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{1 - \frac{\mu_{nm}^2}{2+\nu} 1 - th^2\mu_{nm} + \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} \frac{th\mu_{nm} N_{nm}^+ - T_{nm}^-}{\mu_{nm}} \right], \\
& \frac{\left(\frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} + \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}} \frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \xi \frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} th\mu_{nm} \right) N_{nm}^+}{1 - th^2\mu_{nm} + \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} - \\
& - \frac{\left(th\mu_{nm} \frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \xi \frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} \right) T_{nm}^- + \left(-th\mu_{nm} \xi \frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} + \frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} \right) T_{nm}^+}{1 - th^2\mu_{nm} + \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} \\
& - \frac{\left(\frac{1}{\mu_{nm}} \frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} + th\mu_{nm} \frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \xi \frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} \right) N_{nm}^-}{1 - th^2\mu_{nm} - \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} + \\
& + \frac{2\nu}{\mu_{nm}} \left[\left(\xi - \frac{sh\mu_{nm}\xi}{\mu_{nm} ch\mu_{nm}} \right) \frac{th\mu_{nm} T_{nm}^+ - N_{nm}^-}{1 + \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}} \frac{\mu_{nm}^2}{2+\nu} 1 - th^2\mu_{nm} - \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{1 - \frac{\mu_{nm}^2}{2+\nu} 1 - th^2\mu_{nm} + \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} \frac{th\mu_{nm} N_{nm}^+ - T_{nm}^-}{\mu_{nm}} \right], \tag{31}
\end{aligned}$$

где $N_{nm}^\pm = \frac{q_{nm}^\pm \pm q_{nm}^-}{2\mu_{nm}^2}$, $T_{nm}^\pm = \frac{g_{nm}^\pm \pm g_{nm}^-}{2\mu_{nm}}$.

Используя (18)–(31) в отсутствии массовых сил для поверхностных нагрузок компонент симметричного тензора напряжений, можно написать в окончательном виде следующие выражения:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} + \frac{3}{\mu_{nm}} th\mu_{nm} \frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \xi th\mu_{nm} \frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} \right) N_{nm}^+}{1 - th^2\mu_{nm} + \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} - \right. \\
& - \frac{\left(th\mu_{nm} \frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} + \frac{2}{\mu_{nm}} \frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \xi \frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} \right) T_{nm}^-}{1 - th^2\mu_{nm} + \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} + \\
& + \frac{\left(\frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} + \frac{2}{\mu_{nm}} th\mu_{nm} \frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \xi \frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} th\mu_{nm} \right) T_{nm}^+}{1 - th^2\mu_{nm} - \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} - \\
& - \frac{\left(\frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} th\mu_{nm} + \frac{3}{\mu_{nm}} \frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \xi \frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} \right) N_{nm}^-}{1 - th^2\mu_{nm} - \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} + \\
& + 2 \frac{2+\nu}{\mu_{nm}} \frac{(N_{nm}^- - T_{nm}^+ th\mu_{nm}) \left(\frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} \frac{\nu}{(2+\nu) \left(1 + \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}} \right) - \mu_{nm}^2} \xi th\mu_{nm} \right)}{1 - th^2\mu_{nm} - \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} + \\
& \left. + 2 \frac{2+\nu}{\mu_{nm}} \frac{(T_{nm}^- - N_{nm}^+ th\mu_{nm}) \left(\frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} \frac{\nu}{2+\nu - \mu_{nm}^2} \right)}{1 - th^2\mu_{nm} + \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} \right] \varphi_{nm}(x, y)_{,ij}, \tag{32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_{nm}^2 \left[\frac{\left(\frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} + \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm} \frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \xi th\mu_{nm} \frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} \right) N_{nm}^+}{1 - th^2\mu_{nm} + \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} \right. \\
& \left. \frac{\left(th\mu_{nm} \frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \xi \frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} \right) T_{nm}^- + \left(\frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \xi \frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} th\mu_{nm} \right) T_{nm}^+}{1 - th^2\mu_{nm} + \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} \right. \\
& \left. - \frac{\left(\frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} th\mu_{nm} + \frac{3}{\mu_{nm}} \frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \xi \frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \frac{2}{\mu_{nm}} \frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} \right) N_{nm}^-}{1 - th^2\mu_{nm} - \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} \right] \varphi_{nm}(x, y), \\
\sigma_{iz} = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_{nm} \left[\frac{\left(\frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \xi \frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} th\mu_{nm} \right) N_{nm}^+}{1 - th^2\mu_{nm} + \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} + \frac{\left(\xi \frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} + \frac{sh\mu_{nm}\xi}{\mu_{nm} ch\mu_{nm}} - \frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} th\mu_{nm} \right) T_{nm}^-}{1 - th^2\mu_{nm} + \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} + \right. \\
& \left. + \frac{\left(\frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \xi \frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} th\mu_{nm} - \frac{ch\mu_{nm}\xi}{\mu_{nm} ch\mu_{nm}} th\mu_{nm} \right) T_{nm}^+ - \left(th\mu_{nm} \frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \xi \frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} \right) N_{nm}^-}{1 - th^2\mu_{nm} - \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} \right. \\
& \left. - \frac{2+\nu}{\mu_{nm}^2} \frac{2\nu\mu_{nm}}{(2+\nu)\left(1+\frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}\right) - \mu_{nm}^2} \frac{(T_{nm}^+ th\mu_{nm} - N_{nm}^-)}{1 - th^2\mu_{nm} - \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} th\mu_{nm} - \right. \\
& \left. - \frac{2+\nu}{\mu_{nm}^2} \frac{2\nu\mu_{nm}}{(2+\nu)\left(1+\frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}\right) - \mu_{nm}^2} \frac{(T_{nm}^+ th\mu_{nm} - N_{nm}^-)}{1 - th^2\mu_{nm} - \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} th\mu_{nm} \left(\frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - 1 \right) - \right. \\
& \left. - \frac{2+\nu}{\mu_{nm}^2} \frac{2\nu\mu_{nm}}{(2+\nu)\left(1+\frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}\right) - \mu_{nm}^2} \frac{(T_{nm}^+ th\mu_{nm} - N_{nm}^-)}{1 - th^2\mu_{nm} - \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} th\mu_{nm} \left(\frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - 1 \right) \right] \varphi_{nm}(x, y),
\end{aligned}$$

которые точно удовлетворяют граничным условиям, заданным на гранях.

Обеспечение равновесного состояния параллелепипеда достигается под воздействием самоуравновешенных поверхностных нагрузок, т.е.

$$q_{nm}^+ = q_{nm}^- = q_{nm}, \quad g_{nm}^+ = g_{nm}^- = g_{nm}.$$

Воспользовавшись выражениями для компонент симметричного тензора напряжений, можно получить выражения для трехмерных уравнений равновесия в напряжениях:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij,j} + \sigma_{iz,z} = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} 2\nu \left[\frac{th\mu_{nm} \left(\frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - 1 \right)}{1 - th^2\mu_{nm} + \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} q_{nm} + \frac{th\mu_{nm} \left(\frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \xi th\mu_{nm} \right)}{1 - th^2\mu_{nm} - \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} \times \right. \\
& \left. \times \frac{1 - \frac{\mu_{nm}^2}{(2+\nu)}}{1 + \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}} - \frac{\mu_{nm}^2}{(2+\nu)}} g_{nm} \right] \varphi_{nm}(x, y), \quad (33)
\end{aligned}$$

$$\sigma_{zz,z} + \sigma_{iz,i} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} 2\nu \frac{th^2\mu_{nm}}{1 + \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}} - \frac{\mu_{nm}^2}{(2+\nu)}} \frac{\frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - 1}{1 - th^2\mu_{nm} - \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} g_{nm} \varphi_{nm}(x, y).$$

Из последнего выражения (33) следует, что при отсутствии касательных поверхностных сил автоматически выполняются уравнения равновесия.

Задача о равновесии параллелепипеда под воздействием самоуравновешенных массовых сил $\iint_V X_i dV = 0$ при отсутствии поверхностных нагрузок $S_i = 0$. Предположим, массовые силы потенциальны $X_i = X_{,i}$, причем потенциал представляет собой гармоническую функцию: $\Delta\Delta X = 0$. Для компонент симметричного тензора напряжений введем функцию напряжений: $\sigma_{ij} = F_{,ij}$. Полученные выражения подставляем в уравнения равновесия и уравнения Бельтрами–Митчелла, свертывая последнее, будем иметь следующие уравнения:

$$\Delta F + X = 0, \quad \Delta\Delta\Delta F = 0.$$

Здесь с учетом гармоничности массовых сил из второго уравнения следуют три гармоничности искомой функции напряжений $F=F(x, y, \xi)$. Следовательно, если решить неоднородное уравнение Лапласа

$$\Delta F + X=0, \quad (34)$$

будет обеспечено выполнение уравнения равновесия внутри области и на её границе.

Потенциалы тензора напряжений и массовых сил разложим в бесконечный функциональный ряд по базисным функциям:

$$\begin{cases} F(x, y, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} F_{nmk} \varphi_{nmk}(x, y, \xi), \\ X(x, y, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{nmk} \varphi_{nmk}(x, y, \xi). \end{cases} \quad (35)$$

Сначала рассмотрим вспомогательную спектральную задачу

$$\Delta F + \mu^2 F=0, \quad (36)$$

откуда для базисных функций имеем

$$\Delta \varphi_{nmk} + \mu_{nmk}^2 \varphi_{nmk} = 0. \quad (37)$$

Здесь по n , m и k суммирование не ведется. В зависимости от характера воздействия потенциала массовой силы, а также с целью обеспечения выполнения соответствующих граничных условий:

$$\sigma_{ij} n_j|_G = 0, \quad (\sigma_{ij,j} + X_i)|_G = 0,$$

базисные функции представим в виде косинус – полиномов:

$$\varphi_{nmk}(x, y, \xi) = \left(\cos \pi n x - \frac{1}{9} \cos 3 \pi n x \right) \left(\cos \pi m y - \frac{1}{9} \cos 3 \pi m y \right) \left(\cos \pi k \xi - \frac{1}{9} \cos 3 \pi k \xi \right)$$

или в виде синус-полиномов

$$\varphi_{nmk}(x_1, x_2) = \left(\sin \pi n x - \frac{1}{3} \sin 3 \pi n x \right) \left(\sin \pi m y - \frac{1}{3} \sin 3 \pi m y \right) \left(\sin \pi k \xi - \frac{1}{3} \sin 3 \pi k \xi \right).$$

Следует отметить, что базисные функции в виде косинус- и синус- полиномов являются взаимно ортогональными, следовательно, соответствующие бесконечные тригонометрические ряды (25) являются сходящимися. При этом для определения собственных чисел используем известную формулу Релея–Ритца:

$$\mu_{nm}^2 = \frac{\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \iint_V \Delta \varphi_{lij} \varphi_{nmk} dV}{\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \iint_V \varphi_{lij} \varphi_{nmk} dV} \quad (38)$$

и получим следующие выражения:

$$\mu_{nmk}^2 = a \pi^2 \left(\frac{n^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} + \frac{k^2}{l_3^2} \right), \quad (39)$$

где $a = 1$ – коэффициент для синус-полинома; $a = \frac{250}{729}$ – коэффициент для косинус-полинома. С учетом (36)–(39) искомое решение можно представить в следующем виде:

$$F(x, y, \xi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{X_{nmk}}{\mu_{nm}^2} \varphi_{nmk}(x, y, \xi).$$

Следовательно,

$$\sigma_{ij} = F_{,ij} = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{X_{nmk}}{\mu_{nm}^2} \varphi_{nmk}(x, y, \xi)_{,ij}. \quad (40)$$

Полученные решения представляют собой общее решение пространственной задачи теории упругости в напряжениях при воздействии самоуравновешенной массовой силы. Пользуясь принципом суперпозиции из полученных решений (32) и (40), всегда можно построить общее решение для внешних массовых и поверхностных сил.

Предельные случаи для области деформирования. Из общей пространственной задачи можно перейти к двумерным и одномерным задачам, для которых с применением раз-

личных постулатов и гипотез получены аналитические решения [10–14]. К такого рода задачам можно отнести задачи о равновесии достаточно длинного прямоугольного стержня и тонкой прямоугольной пластины.

1. Тонкая прямоугольная пластина ($c \rightarrow 0$).

Согласно классической теории деформирования тонких пластин, нормальные к срединной плоскости компоненты симметричного тензора напряжений пренебрежимо малы по сравнению с продольными компонентами напряжений. При рассмотрении прямоугольной достаточно тонкой пластины при $c \rightarrow 0$ имеем следующие очевидные соотношения:

$$\mu_{nm} \rightarrow 0, \quad th\mu_{nm} \rightarrow \mu_{nm} \rightarrow 0, \quad \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}} \rightarrow 1, \quad sh\mu_{nm}\xi \rightarrow \xi\mu_{nm} \approx \xi sh\mu_{nm}, \quad ch\mu_{nm}\xi \rightarrow ch\mu_{nm} \rightarrow 1,$$

Воспользовавшись этими соотношениями для компонент симметричного тензора напряжений, будем иметь следующие выражения:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} 2 \left[\frac{1 - (2+\nu) \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}} \left(1 - \frac{\nu}{2+\nu - \mu_{nm}^2}\right) q_{nm}}{1 - th^2\mu_{nm} + \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}} \frac{q_{nm}}{\mu_{nm}^2} - \right. \\ &\quad \left. - \xi \frac{(2+\nu) \left(1 - \frac{\nu}{(2+\nu) \left(1 + \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}\right) - \mu_{nm}^2}\right)}{1 - th^2\mu_{nm} - \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}} \frac{th^2\mu_{nm}}{\mu_{nm}^2} c \frac{g_{nm}}{\mu_{nm}} \right] \varphi_{nm}(x, y)_{,ij} \approx \\ &\approx \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\frac{q_{nm}}{\mu_{nm}^2} + \xi \frac{4+\nu}{\mu_{nm} - th\mu_{nm}} c g_{nm} \right\} \varphi_{nm}(x, y)_{,ij}, \\ \sigma_{zz} &\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\frac{ch\mu_{nm}}{ch\mu_{nm}} + \frac{1}{\mu_{nm}} - th\mu_{nm} \frac{ch\mu_{nm}}{ch\mu_{nm}} - \xi^2 th\mu_{nm} \frac{sh\mu_{nm}}{ch\mu_{nm}}}{1 - th^2\mu_{nm} + \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}} q_{nm} + \right. \\ &\quad \left. + \xi \frac{\frac{sh\mu_{nm}}{ch\mu_{nm}} - \frac{ch\mu_{nm}}{ch\mu_{nm}} th\mu_{nm}}{1 - th^2\mu_{nm} - \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}} \mu_{nm} c g_{nm} \right\} \varphi_{nm}(x, y) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1 + \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}} - \xi^2 th^2\mu_{nm}}{1 - th^2\mu_{nm} + \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}} q_{nm} + \right. \\ &\quad \left. + \xi \frac{\frac{sh\mu_{nm}}{ch\mu_{nm}} - th\mu_{nm}}{1 - th^2\mu_{nm} - \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}} \mu_{nm} c g_{nm} \right\} \varphi_{nm}(x, y) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm} \varphi_{nm}(x, y) = q(x, y), \quad (41) \\ \sigma_{iz} &\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\xi \frac{\frac{sh\mu_{nm}}{ch\mu_{nm}} - \frac{ch\mu_{nm}}{ch\mu_{nm}} th\mu_{nm}}{1 - th^2\mu_{nm} + \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}} \frac{q_{nm}}{\mu_{nm}} + \frac{\frac{ch\mu_{nm}}{ch\mu_{nm}} - \xi^2 \frac{sh\mu_{nm}}{ch\mu_{nm}} th\mu_{nm} - \frac{ch\mu_{nm}}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}}{1 - th^2\mu_{nm} - \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}} c g_{nm} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\nu}{\left(1 + \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}\right) - \frac{\mu_{nm}^2}{2+\nu}} \frac{\frac{ch\mu_{nm}}{ch\mu_{nm}} - 1}{1 - th^2\mu_{nm} - \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}} \frac{th^2\mu_{nm}}{\mu_{nm}^2} c g_{nm} \right] \varphi_{nm}(x, y)_{,i} \approx \\ &\approx \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - \xi^2 th^2\mu_{nm} - \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}}{1 - th^2\mu_{nm} - \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}} c g_{nm} \varphi_{nm}(x, y)_{,i} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c g_{nm} \varphi_{nm}(x, y)_{,i} = cg(x, y)_{,i}. \end{aligned}$$

Из полученных выражений (41) следует, что в тонких пластинах так называемые продольные напряжения σ_{ij} для сжимающих или растягивающих нагрузок по нормальной координате распределены симметрично, а при воздействии касательных нагрузок они становятся антисимметричными. Причем, с уменьшением толщины пластины наблюдается резкое увеличение их значений. Таким образом, положенная в основу для тонких пластин гипотеза классической теории о преобладании продольных напряжений находит своё подтверждение для самоуравновешенных нормальных и касательных нагрузок. Вместе с тем, нормальная, к срединной плоскости, компонента напряжений с уменьшением толщины пластин стремится к нормальной нагрузке: $\sigma_{zz} \rightarrow q(x, y)$. Касательные напряжения стремятся к касательной нагрузке: $\sigma_{iz} \rightarrow cg(x, y)_{,i}$, вопреки принятым гипотезам об их тривиальности по

классической теории пластин. Аналогичные результаты получены при использовании неклассической теории пластин, предложенных на основе нелинейной теории В.В. Новожилова [15–16].

2. Длинный прямоугольный стержень ($c \rightarrow \infty$).

Согласно общим положениям курса по сопротивлению материалов при сжатии стержня реализуется одноосное напряженное состояние, а при чистом кручении стержней реализуется двух компонентное напряженное состояние. При этом внешние воздействия являются самоуравновешенными. Для этого предельного случая, когда рассматриваемый параллелепипед становится достаточно длинным прямоугольным стержнем ($c \rightarrow \infty$) воспользуемся следующими соотношениями:

$$\mu_{nm} \rightarrow \infty, th\mu_{nm} \rightarrow 1, \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}} \rightarrow 0, sh\mu_{nm} \rightarrow \infty, sh\mu_{nm}\xi \rightarrow \xi sh\mu_{nm}, ch\mu_{nm}\xi \rightarrow ch\mu_{nm} \rightarrow \infty.$$

Тогда для компонент тензора напряжений будем иметь следующие выражения

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} & \left\{ \frac{\frac{ch\mu_{nm} + \frac{3}{\mu_{nm}} th\mu_{nm} \frac{ch\mu_{nm}}{ch\mu_{nm}} - \xi^2 th\mu_{nm} \frac{sh\mu_{nm}}{ch\mu_{nm}} - 2 \left(2 + \nu - \frac{\nu}{1 - \frac{\mu_{nm}^2}{2 + \nu}} \right) \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}}{1 - th^2 \mu_{nm} + \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}} \frac{q_{nm}}{\mu_{nm}^2} + \right. \\ & \left. + \xi \frac{\frac{sh\mu_{nm} + \frac{2}{\mu_{nm}} th\mu_{nm} \frac{sh\mu_{nm}}{ch\mu_{nm}} - \frac{ch\mu_{nm}}{ch\mu_{nm}} th\mu_{nm} - 2 \left(2 + \nu - \frac{\nu}{1 + \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}} \frac{\mu_{nm}^2}{2 + \nu}} \right) \frac{th^2 \mu_{nm}}{\mu_{nm}^2}}{1 - th^2 \mu_{nm} - \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} c \frac{g_{nm}}{\mu_{nm}} \right\} \varphi_{nm}(x, y),_{ij} \approx \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} & \left\{ 2\xi \frac{1 + \nu + \frac{\nu}{\left(1 + \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}} \right) \frac{\mu_{nm}^2}{2 + \nu}}}{\frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}} \frac{th^2 \mu_{nm}}{\mu_{nm}^2} c g_{nm} - \frac{3 - 2(2 + \nu) \left(1 - \frac{\nu}{2 + \nu - \mu_{nm}^2} \right) \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}} \frac{q_{nm}}{\mu_{nm}^2}}{\frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}} \right\} \varphi_{nm}(x, y),_{ij} \approx \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} & \left\{ 2\xi(\nu + 1) \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}} c g_{nm} - (1 + 2\nu) \frac{q_{nm}}{\mu_{nm}^2} \right\} \varphi_{nm}(x, y),_{ij} = 0 \quad (42) \\ \sigma_{zz} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} & \left\{ \frac{\frac{ch\mu_{nm} + \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm} \frac{ch\mu_{nm}}{ch\mu_{nm}} - \xi^2 th\mu_{nm} \frac{sh\mu_{nm}}{ch\mu_{nm}}}{1 - th^2 \mu_{nm} + \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}} q_{nm} + \right. \\ & \left. \xi \frac{\frac{sh\mu_{nm}}{ch\mu_{nm}} \frac{ch\mu_{nm}}{ch\mu_{nm}} th\mu_{nm}}{1 - th^2 \mu_{nm} - \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}} \mu_{nm} c g_{nm} \right\} \varphi_{nm}(x, y) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - th^2 \mu_{nm} + \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}}{1 - th^2 \mu_{nm} + \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}} q_{nm} \varphi_{nm}(x, y) = q(x, y). \\ \sigma_{iz} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} & \left[\xi \frac{\frac{sh\mu_{nm}}{ch\mu_{nm}} - th\mu_{nm}}{1 - th^2 \mu_{nm} + \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} \frac{q_{nm}}{\mu_{nm}} + \frac{1 - \xi^2 th^2 \mu_{nm} - \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}}{1 - th^2 \mu_{nm} - \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}} c g_{nm} \right] \varphi_{nm}(x, y),_i \approx \\ \approx \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} & \frac{1 - th^2 \mu_{nm} - \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}}{1 - th^2 \mu_{nm} - \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}} c g_{nm} \varphi_{nm}(x, y),_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c g_{nm} \varphi_{nm}(x, y),_i = c g(x, y),_i. \end{aligned}$$

Для достаточно длинных стержней так называемые продольные компоненты тензора напряжений становятся пренебрежительно малыми. При этом при сжатии стержней реализуется одноосное напряженное состояние, а для чистого кручения стержней имеет место двухкомпонентное напряженное состояние. Эти результаты хорошо согласуются с известными результатами теории упругости, полученными с помощью классических подходов.

Главной особенностью решения пространственных задач в напряжениях является вопрос о степени точности выполнения уравнений равновесия. Принимая во внимание (33), можно проверить выполнение уравнений равновесия. Например, для $\xi = \pm 1$ достигается точное удовлетворение уравнений равновесия: $\sigma_{ij,j}(\pm 1) + \sigma_{iz,z}(\pm 1) = 0$, $\sigma_{zz,z}(\pm 1) + \sigma_{iz,i}(\pm 1) = 0$. Когда

параллелепипед превращается в тонкую пластину: $c \ll 1$ или становится достаточно длинным прямоугольным стержнем: $c \gg 1$, в рассматриваемой области достигается выполнение уравнений равновесия: $\sigma_{ij,j}(\xi) + \sigma_{iz,z}(\xi) = 0$, $\sigma_{zz,z}(\xi) + \sigma_{iz,i}(\xi) = 0$. Следовательно, для промежуточных состояний параллелепипеда априори можно утверждать о выполнении уравнений равновесия, проверить которые расчетами из (33) несложно.

Решение конкретных прикладных задач. На основе полученных приближенно-аналитических решений рассмотрим конкретные прикладные задачи теории упругости.

1. Сжатие параллелепипеда.

На противоположных гранях действует постоянная сжимающая распределенная нагрузка $q(x,y) = q_0$. Разлагая внешние воздействия по базисным функциям, будем иметь

$$q(x,y) = \frac{1024}{81\pi^2} q_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \left(\sin n\pi x - \frac{1}{3} \sin 3n\pi x \right) \left(\sin m\pi y - \frac{1}{3} \sin 3m\pi y \right),$$

здесь n, m принимают только нечетные значения.

В этой задаче имеем следующие распределения для компонент симметричного тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} &= -\frac{64q_0}{81} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \left((1+2\nu) \frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} + \xi \mu_{nm} \frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \frac{2(2+\nu)\nu}{2+\nu-\mu_{nm}^2} \right) \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}}{1 - th^2\mu_{nm} + \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} \frac{1}{\mu_{nm}^2} - \\ &\quad - \begin{bmatrix} \frac{n}{m} (\sin n\pi x - 3\sin 3n\pi x) \left(\sin m\pi y - \frac{1}{3} \sin 3m\pi y \right) \\ \frac{m}{n} \left(\sin n\pi x - \frac{1}{3} \sin 3n\pi x \right) (\sin m\pi y - 3\sin 3m\pi y) \\ (\cos n\pi x - \cos 3n\pi x) (\cos m\pi y - \cos 3m\pi y) \end{bmatrix}, \\ \sigma_{zz} &= \frac{64q_0}{81\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm} \right) \frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \xi th\mu_{nm} \frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}}}{1 - th^2\mu_{nm} + \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} - \\ &\quad - \frac{1}{mn} \left(\sin n\pi x - \frac{1}{3} \sin 3n\pi x \right) \left(\sin m\pi y - \frac{1}{3} \sin 3m\pi y \right), \\ \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} &= \frac{64q_0}{81\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} \frac{\xi ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} th\mu_{nm}}{1 - th^2\mu_{nm} + \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} \frac{1}{\mu_{nm}} \begin{bmatrix} \frac{1}{m} (\cos n\pi x - \cos 3n\pi x) \left(\sin m\pi y - \frac{1}{3} \sin 3m\pi y \right) \\ \frac{1}{m} \left(\sin n\pi x - \frac{1}{3} \sin 3n\pi x \right) (\cos m\pi y - \cos 3m\pi y) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Чистое кручение параллелепипеда: $g(x,y) = g_0 xy$.

Разлагая внешнюю нагрузку в функциональный ряд по базисным функциям, будем иметь

$$g(x,y) = \frac{16g_0}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 n^2} \left(\cos n\pi x - \frac{1}{9} \cos 3n\pi x \right) \left(\cos m\pi y - \frac{1}{9} \cos 3m\pi y \right),$$

здесь n, m принимают только нечетные значения.

Для этой задачи имеем следующие распределения для компонент симметричного тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} &= c \frac{16g_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} \left(1 - 2(1+\nu) \frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}} \right) - \xi \frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} th\mu_{nm} + \xi \frac{2\nu th^2\mu_{nm}}{\mu_{nm}}}{\left(1 - th^2\mu_{nm} - \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm} \right) \mu_{nm}} \times \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \frac{1}{m^2} (\cos n\pi x - \cos 3n\pi x) \left(\cos m\pi y - \frac{1}{9} \cos 3m\pi y \right) \\ \frac{1}{n^2} (\cos n\pi x - \frac{1}{9} \cos 3n\pi x) (\cos m\pi y - \cos 3m\pi y) \\ \frac{1}{-nm} \left(\sin n\pi x - \frac{1}{3} \sin 3n\pi x \right) \left(\sin m\pi y - \frac{1}{3} \sin 3m\pi y \right) \end{bmatrix}, \\ \sigma_{zz} &= c \frac{16g_0}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\frac{sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \xi \frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} th\mu_{nm}}{1 - th^2\mu_{nm} - \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} \frac{\mu_{nm}}{m^2 n^2} \left(\cos n\pi x - \frac{1}{9} \cos 3n\pi x \right) \left(\cos m\pi y - \frac{1}{9} \cos 3m\pi y \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} &= c \frac{16g_0}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\frac{ch\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} - \frac{\xi sh\mu_{nm}\xi}{ch\mu_{nm}} th\mu_{nm} - \frac{ch\mu_{nm}}{\mu_{nm} ch\mu_{nm}} th\mu_{nm} - (2+\nu) \frac{th^2\mu_{nm}}{\mu_{nm}^2} + \frac{2\nu\mu_{nm}}{(2+\nu)(1+\frac{th\mu_{nm}}{\mu_{nm}}) - \mu_{nm}^2} \frac{(ch\mu_{nm}\xi - 1)}{ch\mu_{nm}}}{1 - th^2\mu_{nm} - \frac{1}{\mu_{nm}} th\mu_{nm}} \times \\ &\times \frac{16}{\mu_{nm}} \left[\frac{1}{m} (\cos n\pi x - \cos 3n\pi x) \left(\sin m\pi y - \frac{1}{3} \sin 3m\pi y \right) \right] \\ &\times \left[\frac{1}{m} (\sin n\pi x - \frac{1}{3} \sin 3n\pi x) (\cos m\pi y - \cos 3m\pi y) \right]. \end{aligned}$$

3. Действие самоуравновешанных массовых сил.

Теперь рассмотрим воздействие самоуравновешанных массовых сил, для которых бигармонический потенциал имеет вид $X = -X_0 x^2$, поскольку $\iint_V X_x dV = \iint_V X_{,x} dV = X_0 \iint_G x^2 |_{-1}^1 n_x dG = 0$. С учетом условий симметрии задачи будем решать 1/8 части параллелепипеда, при этом потенциал массовой силы представим в виде

$$\begin{aligned} X(x, y, \xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{nmk} \left(\cos n\pi x - \frac{1}{9} \cos 3n\pi x \right) \left(\sin m\pi y - \frac{1}{3} \sin 3m\pi y \right) \times \\ &\times \left(\sin k\pi \xi - \frac{1}{3} \sin 3k\pi \xi \right) \end{aligned}$$

где $X_{nmk} = X_0 \left(\frac{2}{3}\right)^6 \frac{10}{\pi^4 n^2 m k} (-1)^n [1 - (-1)^m] [1 - (-1)^k]$.

Следовательно,

$$\sigma_{ij} = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{X_{nmk}}{\mu_{nm}^2} \left(\cos n\pi x - \frac{1}{9} \cos 3n\pi x \right) \left(\sin m\pi y - \frac{1}{3} \sin 3m\pi y \right) \left(\sin k\pi \xi - \frac{1}{3} \sin 3k\pi \xi \right)_{,ij}.$$

Таким образом, для рассмотренных прикладных задач получены аналитические решения, представленные в виде функционального ряда, с использованием ортонормированных базисных функций в виде синус- или косинус-полиномов, точно удовлетворяющих всем граничным условиям, заданным на боковых гранях параллелепипеда.

Заключение.

1. Предложен эффективный приближенно-аналитический метод решения пространственных задач теории упругости в напряжениях с применением новых потенциалов напряжений.

2. Для взаимно уравновешенных поверхностных нагрузок показана эквивалентность постановки пространственной задачи в перемещениях и напряжениях.

3. На основе полученных трехмерных решений проверены различные гипотезы, основанные на технических теориях несущих элементов конструкций.

4. С применением ортонормированных базисных функций в виде синус- и косинус-полиномов, точно удовлетворяющих всем граничным условиям на боковых гранях параллелепипеда, решены конкретные прикладные задачи.

Литература

- [1] Surya N., Patnaik I., Dale A. Hopkins Full Length Research Paper Completed Beltrami-Michell formulation in polar coordinates International Journal of Physical Sciences. Vol. 2(5). 2007. P. 128–139. <http://www.academic-journals.org/IJPS>.
- [2] Süleyman Muti, Salih Dokuz M. Two-dimensional Beltrami–Michell equations for a mixture of two linear elastic solids and some applications using the Airy stress function // International Journal of Solids and Structures. Vol. 59. 2015. P. 140–146.
- [3] Конавалов А.Н. Численные методы в динамических задачах теории упругости // Сиб. математический журнал. 1997. Т. 38. № 3. С. 551–568.
- [4] Победря Б.Е. К проблеме статики в напряжениях // Вестник МГУ. Сер. “Матем., мех.” 2003. № 3. С. 61–67.
- [5] Shaofan Li., Gupta A., Markensoff X. Conservation laws of linear elasticity in stress formulations // Proceedings of Royal Society of London. 2005. P. 99–116.
- [6] Холматов Т.О. методах решения задачи в напряжениях // ДАН СССР. 1980. Т.1. № 2. С. 315–317.
- [7] Ахмедов А.Б. Численное решение пространственных задач теории вязкоупругости в напряжениях: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Ташкент, 1984. –12 с.

- [8] *Elakkad A., Bennani M.A., EL. J. Mekkaoui., Elkhalfi A.* A Mixed Finite Element Method for Elasticity Problem // *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*. 2013. N 4 (2). P. 161–166.
- [9] *Тукалов Ю., Я.* Equilibrium finite elements for plane problems of the elasticity theory // *Magazine of Civil Engineering*. 2019. N 91(7). P. 80–97. DOI: 10.18720/MCE.91.8.
- [10] *Altenbach H., Eremeyev V.A.* (Eds). *Shell like Structures: Nonclassical Theories and Applications* // *Advanced Structured Materials*. Vol. 15. <https://doi.org/10.10079783642218552> Springer, Berlin et al. 2011. –761 p.
- [11] *Akhmedov A.B., Grigorev P.S., Ibodulloev Sh.R., Kuldibaeva L.A.* Imitating Simulation of Thermomechanical Processing of Metals // *J: Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*. Vol.12. 2021. No. 4. P 31–36. <https://doi.org/10.17762/turcomat/v12i462>.
- [12] *Ахмедов А.Б., Шешенин С.В.* Нелинейные уравнения движения движения ортотропных плит // *Вестник МГУ Механика, математика*. 2012. С. 66–68. <https://doi.org/10.3103/S002713301203003X>
- [13] *Худойназаров Х.Х., Халмурадов Р.И., Ялгашев Б.Ф.* Продольно-радиальные колебания упругой цилиндрической оболочки, заполненной вязкой сжимаемой жидкостью // *Томский государственный университет. Журнал матем. и механики*. 2021. N 69. С. 139–154.
- [14] *Li L.H., You F.T.* Complex variable function method for the plane elasticity and the dislocation problem of quasicrystals with point group 10 mm // *Physics Letters A*. 2008. N. 372 (4). P. 510–514.
- [15] *Ахмедов А.Б., Шамсиев Д.Н.* Неклассическая теория пластин сложной конфигурации с переменной толщиной // *Вестник ТГТУ. Ташкент*, 2013. №2. С. 14–23.
- [16] *Ахмедов А.Б.* Численное решение спектральных задач. Ташкент: Фан, 2012. – 120 с.

Дата поступления
15.02.2022

Ахмедов А.Б. Потенциал кучланишларда эластиклик назариясининг фазовий масалаларини ечиши

Аннотация: Ушбу мақолада эластиклик назариясининг фазовий масалаларини кучланишда ечилиши масаласи қаралган. Таклиф этилган янги кучланишлар потенциали ёрдамида кучланишлардаги олти та тенглама потенциалларга нисбатан учтага келтирилган. Ортонормал базис функцияларни синус ёки косинус полиномлар шаклида танлаб олиниб параллелепипед ён ёқларидаги кучланишлардаги барча чегаравий шартлар бажарилишига эришилган. Муайян татбиқий масалалар ечилган.

Калим сўзлар: эластиклик назарияси; кучланишлардаги масала; параллелепипед; кучланиш потенциалли; ўзаро мувозанатлашган юкламалар; базис функциялар; косинус-полиномлар; хос сонлар.

Ahmedov A.B. Solution of spatial problems of the theory of elasticity in stress potentials

Abstract: In this paper, spatial problems of the theory of elasticity in stresses are considered. With the help of new stress functions, a system of six stress equations reduced to solving equivalent resolving equations with respect to the three potentials of the stress tensor. The choice of basic functions in the form of sine and cosine polynomials achieves exact satisfaction of all boundary conditions on the tank faces of the parallelepiped in stresses. Some applied tasks have been solved.

Keywords: elasticity theory; stress problem; parallelepiped; stress potential; mutually balanced loads; basis functions; cosine polynomials.

ОСОБЕННОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ЗАБИВНЫХ СВАЙ

Сирожиддинов З.

Самаркандский государственный архитектурно-строительный институт. Самарканд, Узбекистан

Аннотация: В статье детально анализируются распространенные методы определения несущей способности забивных свай. Указывается, что таковыми являются практический (табличный) метод расчета и метод испытаний пробной статической нагрузкой. Отмечается, что табличные значения сопротивления грунтов под острием и по боковой поверхности свай в практическом методе расчета нуждаются в дальнейшем уточнении, поскольку при составлении табличных их значений не были учтены характеристики изменчивости и даже некоторые основные физические показатели грунтов (например, коэффициенты пористости). Метод оценки несущей способности свай по результатам испытаний пробной статической нагрузкой, хотя является более точным, по-разному интерпретируется разными специалистами и нет единого мнения по этому поводу. Подчеркивается, что понятие “несущая способность свай” не должно основываться на величинах постоянных для всех случаев деформаций или определяться в зависимости от конструктивных особенностей надфундаментных конструкций (зданий или сооружений).

Ключевые слова: свая; забивная; несущая способность; сопротивление под остриём; сопротивление по боковой поверхности; предельная нагрузка; результаты испытаний.

Введение. Не только свайный фундамент, но и одиночная свая, особенно забивная, взаимодействуя с грунтом, представляют собой очень сложную систему. Погружение забивной сваи сопровождается процессами вытеснения грунта из пространства, занимаемого ее телом, изменением состояния и свойств окружающего грунта. В зависимости от длины и сечения сваи, способа ее погружения, инженерно-геологических и гидрогеологических условий площадки влияния этих изменений могут быть различными. При совместной работе свай в составе ленточного фундамента, куста свай или свайного поля несущая способность и деформации фундамента зависят еще и от параметров взаимодействия: количества свай, расстояния между ними, длины свай, местоположения в плане ростверка и типа ростверка.

Поэтому создание единой расчетной модели, точно описывающей напряженно-деформированное состояние одиночной сваи и, тем более свайного фундамента, вряд ли возможно. Имеющиеся в этой области предложения, включая выдвинутые в докторских диссертациях последних лет, основываются на серьезных допущениях, приводят к сложным математическим выражениям или требуют численных расчетов конкретных ситуаций, что не позволяет рассматривать их как непосредственно применимые для массового проектирования [1 – 6 и др.].

Методы определения несущей способности свай. Видимо, для определения несущей способности одиночной сваи наиболее достоверным оказывается метод ее испытания пробной статической нагрузкой, так как именно такая схема испытания максимально соответствует ее работе в составе фундамента. Однако и в этом случае назначение расчетной нагрузки на сваю определяется на основе ряда условий.

Обобщая результаты многих исследований, СП 50-102-2003 устанавливает ряд критериев несущей способности одиночной сваи по результатам полевых статических испытаний [7]:

- нормативное значение предельного сопротивления сваи $F_{u,n}$, определяемое в зависимости от условий испытания;
- несущая способность сваи F_d , определяемая по величине $F_{u,n}$ с помощью коэффициента условий работы γ_c и коэффициента надежности по грунту γ_g по формуле

$$F_d = \gamma_c \frac{F_{u,n}}{\gamma_g}; \quad (1)$$

- расчетная нагрузка N_d , передаваемая на одиночную сваю или сваю в составе фундамента, которая рассчитывается по величине F_d с учетом коэффициента надежности γ_k , зависящего как от способа определения F_d , так и от количества свай в фундаменте:

$$N_d \leq \frac{F_d}{\gamma_k}. \quad (2)$$

Поскольку несущая способность сваи является важнейшим входным параметром, указанные критерии нуждаются в тщательном анализе.

Вторым из наиболее распространенных на практике способов определения несущей способности одиночной сваи служит расчетный метод, определяющий величину F_d в зависимости от сопротивления грунта трению по боковой поверхности и от сопротивления грунта под острием сваи. Здесь также используется ряд коэффициентов условий работы сваи по грунту, но основными являются характеристики расчетного сопротивления грунта по боковой поверхности и под острием сваи f_i и R_i . Величины f_i и R_i определяются статистической обработкой многочисленных данных испытания свай пробной статической нагрузкой и принимаются по таблицам СП [7].

Особо следует отметить, что величины f_i и R_i не связываются в современной практике свайного фундаментостроения с прочностными показателями грунтов ϕ и C , в которых работает свая. Это связано с отмеченным выше во многом неопределенным изменением состояния и свойств грунта вокруг сваи при ее забивке. Поэтому характеристики сопротивления грунта f_i и R_i являются важнейшими входными параметрами при определении несущей способности сваи расчетным методом.

Расчетная нагрузка на сваю N_d и в этом случае определяется по формуле (2).

Практический (табличный) метод расчета несущей способности свай.

Практический метод расчета несущей способности одиночной сваи базируется на том, что она суммируется из сопротивления грунта под ее острием R и по боковой поверхности f .

Приоритет в таком подходе для сваи в однородном грунте, как отмечается в работе [6], по-видимому, принадлежит Пэттону, предложившему в 1895 г. двухчленную формулу, которая в современных обозначениях имеет вид

$$F = A \cdot R + u \cdot l \cdot f, \quad (3)$$

где A , u и l – соответственно площадь поперечного сечения, периметр и длина сваи; R , f – соответственно удельное сопротивление грунта под нижним концом сваи и по боковой поверхности.

В последующих предложениях во втором слагаемом этой формулы была учтена возможность прорезки нескольких различных по мощности и характеристикам слоев грунта.

Таким образом, надежность оценки несущей способности свай зависит от точности и достоверности определения удельных сопротивлений грунта R и f .

На основании данных более 1200 статических испытаний различных типоразмеров свай, забитых в различных грунтовых условиях, А.А.Луга [8] составил таблицы нормативных значений R^n и f^n , введенные в СНиП II-Б. 5-62 [9]. Определение значений f производилось на основании данных по выдергиванию свай или их продавливанию в грунтах, когда сопротивление под острием R тем или иным способом исключалось. По величинам предельной несущей способности свай и значениям сил бокового трения вычислялось предельное сопротивление грунта под острием.

Значения R^n и f^n были получены в зависимости от глубины погружения для R^n , средней глубины расположения слоя грунта f^n , для глинистых грунтов – в диапазоне показателя консистенции от 0 до 0.6 для R^n , от 0 до 0.7 для f^n , для песчаных грунтов всех разновидностей по крупности при средней плотности сложения. В плотных песках всех видов по крупности и супесях значения R^n рекомендовалось увеличивать на 30 %.

При составлении таблиц нормативных значений R^H и f^H А.А. Луга обратил внимание на значительный разброс их величин. В частности, он особо подчеркивал, что такой разброс отмечается не только для различных строительных площадок, удаленных друг от друга, но и для одной строительной площадки и даже для одного фундамента, в составе которого было испытано несколько одинаковых свай [8]. В связи с этим для общесоюзных норм в качестве гарантированных значений R^H и f^H были использованы наименьшие значения по огибающим кривым данных испытаний без обоснования их вероятностно-статистическими методами.

С использованием R^H и f^H несущая способность свай F определялась по формуле [9]

$$N_d \leq F = m \left(R^H * A + u \sum f_i^H h_i \right), \quad (4)$$

где N_d – расчетная нагрузка на сваи; m – коэффициент однородности и условий работы, принимаемый по таблице в зависимости от числа свай в фундаменте и типа ростверка; A – площадь опирания свай на грунт (площадь поперечного сечения свай); u – периметр поперечного сечения свай; h_i – толщина i -слоя грунта, соприкасающегося с боковой поверхностью свай.

Коэффициент однородности и условия работы

Тип свайного ростверка	Значения m при числе свай в фундаменте			
	1-5	6-10	11-20	21 и более
Высокий	0.46	0.51	0.54	0.60
Низкий	0.51	0.54	0.60	0.60

Отметим, что учет числа свай при определении несущей способности фундамента в принципе соответствует вероятностной природе передачи нагрузки сваями на грунтовое основание из-за неоднородности последнего. Однако значения коэффициента m были приняты без достаточного обоснования.

В вышедшем в 1968 г. СНиПе П-Б.5-67, а затем в 1971 г. СНиП П-Б.5-67^x табличные значения R^H и f^H приводятся практически без изменения по сравнению со СНиП П-Б.5-62, с той лишь разницей, что для плотных песков на 30% увеличиваются значения не только R^H , но и f^H .

В нормативных документах, вышедших после 1962 г. с целью более точного учета влияния отдельных факторов на несущую способность свай, были введены отдельные коэффициенты условий работы m и коэффициент однородности грунта K . При этом, для забивных свай принималось $m=1$ и $K=0.7$. Таким образом, в последующих нормативных документах несущая способность свай на основании дальнейших экспериментальных проверок была увеличена за счет не уточнения значений R^H и f^H , а увеличения коэффициента условий работы, исключив при этом из рассмотрения влияние числа свай на несущую способность фундамента.

В вышедшем в 1978 г. СНиП П-17-77, а также в ныне действующем СП [7], на основании многочисленных экспериментальных данных в песчаных грунтах табличные значения R были несколько увеличены. Кроме того, для плотных песков, степень плотности которых определена статическим зондированием, значения R увеличиваются на 100%, при определении плотности сложения по материалам других видов инженерных изысканий – на 60%.

Хотя табличные значения R и f для песчаных грунтов в последних нормативных документах в большей степени соответствуют экспериментальным, чем по предыдущим нормативным документам, вызывает сомнение одинаковая степень увеличения значений R и f в случае плотных песков независимо от их крупности.

Для пылевато-глинистых грунтов значения f в СНиП П-17-77 были расширены до величины консистенции $J_L=1.0$.

Расчетная нагрузка на сваи N_d , согласно действующему СП [7], устанавливается делением расчетной несущей способности F_d на коэффициент надежности γ_k , исходя из условия

$$N_d \leq \frac{F_d}{\gamma_k} = \frac{\gamma_c}{\gamma_k} (\gamma_{cR} \cdot R \cdot A + U \sum \gamma_{cf} \cdot f_i \cdot h_i), \quad (5)$$

где γ_c , γ_{cR} и γ_{cf} – соответственно коэффициенты условий работы сваи в грунте, грунта под нижним концом и на боковой поверхности, учитывающие влияние способа погружения и принимаемые для забивных свай $\gamma_c = \gamma_{cR} = \gamma_{cf} = 1$; R и f_i – соответственно расчетное сопротивление под нижним концом сваи и i -того слоя грунта основания на ее боковой поверхности, принимаемые по таблицам [7]; γ_k – коэффициент надежности, принимаемый для табличного метода расчета несущей способности сваи постоянным и равным $\gamma_k = 1.4$. Остальные обозначения те же, что и в формуле (5).

Отметим, что при расчете несущей способности сваи используются расчетные значения R и f , хотя их табличные значения, приведенные в действующем СП, практически не отличаются от их нормативных значений, приведенных в СНиП II-Б.5-67^x. Величина расчетной нагрузки на сваи также практически не изменяется, если несущая способность умножается на коэффициент однородности, равный 0.7, как было принято в предыдущих СНиПах, или делится на коэффициент надежности, равный 1.4, согласно действующему СП [2].

На основании проведенных исследований Б.В.Бахолдин и Р.А.Немов [10] пришли к выводу, что при оценке несущей способности свай по консистенции грунтов, помимо неполного учета влияния их пористости, возникают ошибки из-за неправильного использования понятия “показатель текучести”. Зависимость R и f от консистенции грунта справедлива лишь для водонасыщенных грунтов. Отмечается, что показатель текучести при степени влажности, равной 0.8, а тем более еще меньшей, не может характеризовать прочностные и деформативные свойства грунта, так как водноколлоидные связи до определенного предела мало зависят от наличия в нем газовой составляющей. Если же газовая составляющая грунта становится преобладающей, то водноколлоидные связи начинают замещаться кристаллизационными, которые показателем консистенции охарактеризованы быть не могут. Справедливость этого положения полностью подтверждается также проведенным нами дисперсионным анализом, в котором не удалось установить значимую связь между R , f и показателем текучести для маловлажных и влажных грунтов, тогда как для водонасыщенных установлена весьма тесная связь [11].

Поскольку табличные значения R и f , составленные А. А. Луга по нижней огибающей опытных данных, относятся к наиболее пористым грунтам, В.В. Бахолдиным и Р.А. Немовым была предложена методика их корректировки, учитывающая влияние коэффициента пористости e . Для сравнения значений R и f , полученных по этой методике при различных значениях e , на рис. 1 представлены построенные автором статьи графики их зависимости от показателя текучести для глубины 10 м и осредненного удельного веса грунтов, равного 18.5 кН/м³. При этом влияние пористости тем больше, чем меньше значения показателя текучести, что логически верно отражает физическое явление. Однако исходными для этой методики являются табличные значения R и f , приведенные в СП [7]. Поэтому они не исключают те недостатки, которые были допущены при составлении табличных значений R и f .

Приведенные выше рассуждения позволяют констатировать следующее:

- табличные значения R и f , помещенные в СП, нуждаются в дальнейшем уточнении. При их составлении были использованы результаты испытаний свай на выдергивание или при исключении из работы острия, т.е. не было обеспечено совместное взаимодействие острия, боковой поверхности и грунтового основания. Табличные значения R и f для пылевато-глинистых грунтов составлены только с учетом глубины и показателя консистенции и не учитывают других характеристик. Для плотных песчаных грунтов используются табличные значения R и f , составленные для песков средней плотности с введением постоянных переходных коэффициентов независимо от крупности песков, что также является сомнительным;

- при составлении табличных значений R и f не были последовательно применены методы математической статистики и теории вероятностей при обработке экспериментальных данных, по ним нельзя установить характеристики изменчивости;

- при переходе от несущей способности к расчетной нагрузке на сваи используемый постоянный коэффициент надежности $\gamma_k=1.4$ не позволяет проектировать фундаменты с учетом изменчивости характеристик грунтовых условий и степени ответственности проектируемых зданий и сооружений;

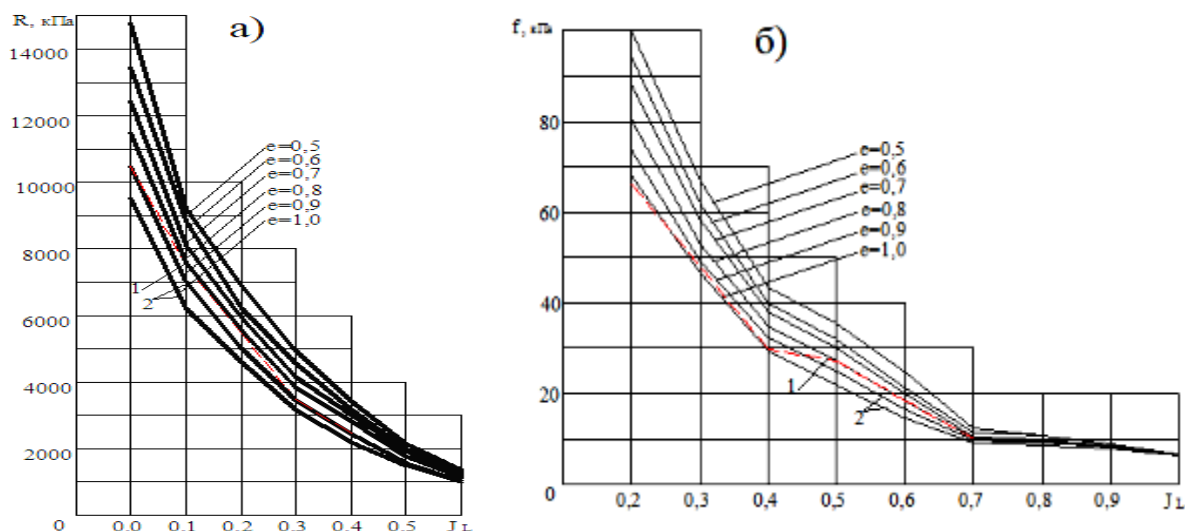


Рис. 1. Зависимости сопротивлений пылеватоглинистых грунтов под острием (а), по боковой поверхности свай (б) от показателя текучести на глубине 10 м: 1—по СП [7]; 2—по данным [10]

- поскольку надежность оценки несущей способности свай практическим методом, прежде всего, зависит от точности и достоверности значений R и f , именно эти показатели и нуждаются в дальнейших исследованиях.

Оценка несущей способности свай по результатам испытаний пробной статической нагрузкой. Среди исследователей имеются различные мнения о том, как следует проводить испытания свай пробной статической нагрузкой и интерпретировать результаты этих испытаний, подробно проанализированные в работах [12–14]. Однако, поскольку режим испытания регламентируется ГОСТом 5686-78, а интерпретация результатов – Сводом правил [7], рассмотрим подробнее эти предложения.

ГОСТ 5686-78 предписывает производить загрузку сваи ступенями, равными 1/10 заданной в программе наибольшей нагрузки на сваю, допуская в определенных грунтовых условиях принимать при испытании первые три ступени, равными 1/5 наибольшей нагрузки. Понятие "заданная в программе наибольшая нагрузка на сваю" не расшифровывается. Обычно она принимается по расчету табличным методом и корректируется последующими испытаниями серии. Выдерживание сваи под каждой ступенью нагружения производится до условной стабилизации осадки, которая регламентируется заданной скоростью перемещения сваи в грунте, в зависимости от вида грунта, залегающего под острием сваи. ГОСТ устанавливает даже масштаб графиков, отражающих результаты испытания сваи.

Если нагрузка при испытании сваи доведена до величины, вызывающей непрерывное возрастание ее осадки S при $S \leq 20$ мм, то нагрузка, соответствующая этой величине осадки, принимается за частное значение предельного сопротивления испытываемой сваи F_u . Во всех остальных случаях для фундаментов зданий и сооружений (кроме мостов и гидротехнических сооружений) за частное значение предельного сопротивления принимается нагрузка, под воздействием которой испытываемая свая получит осадку, равную

$$S = \xi * S_{u,mt}, \quad (6)$$

где $S_{u,mt}$ – предельное значение средней осадки фундамента проектируемого здания или сооружения, устанавливаемое по указаниям СП50-101-2004 [15]; ξ – коэффициент перехода от предельного значения средней осадки фундамента здания или сооружения $S_{u,mt}$ к осадке сваи, полученной при статических испытаниях с условной стабилизацией (затуханием) осадки по стандартной методике.

В ранее действующих СНиПах II–Б. 5–62, II–Б. 5–67 и II–Б. 5–67^x значение ξ принималось равным 0.1. Анализ большого числа экспериментальных данных и наблюдений за осадками эксплуатируемых зданий и сооружений, построенных на свайных фундаментах, позволил специалистам уточнить значение ξ и рекомендовать его, начиная с выхода СНиП II.17-77, равным 0.2. Это, в свою очередь, дало возможность более полно использовать несущую способность свай.

Значение коэффициента ξ , согласно СП50-102-2003, также принимается равным 0.2, кроме случаев, когда осадка, определенная по формуле (6), окажется более 40 мм, в последнем случае за частное значение предельного сопротивления сваи F_u принимается нагрузка, соответствующая $S = 40$ мм. Особо отметим, что если число испытанных свай составляет менее шести, то частное значение предельного сопротивления сваи F_u принимается за несущую способность сваи F_d , т.е. $F_u = F_d$. Утверждение о том, что несущую способность сваи при числе опытов менее шести можно принимать равной наименьшему из результатов испытаний, сопряжено с риском.

Таким образом, регламентируемые сейчас правила определения предельного сопротивления одиночной сваи по данным пробной статической нагрузки весьма противоречивы. С одной стороны, критерием величины F_u может служить срыв сваи (при ее осадке $S=20$ мм), с другой – ее осадка в процессе испытания (от 16 мм – для зданий высокой чувствительности к осадкам, до 40 мм – для менее чувствительных зданий). Такое положение приводит к неопределенности самого понятия предельного сопротивления сваи и, как будет показано далее, для одних и тех же инженерно-геологических условий строительной площадки может привести к различию в величине F_u одной и той же сваи до 2 и более раз.

Широко используемые в практике фундаментостроения висячие сваи, в зависимости от их длины и напластования грунтов, которые прорезает свая, могут иметь различное соотношение между сопротивлением боковой поверхности и сопротивлением острия. Вследствие этого при различном поперечном сечении, длине свай и свойствах грунтов в испытаниях могут быть получены совершенно различные графики зависимости осадки сваи S от пробной статической нагрузки F , характерные примеры которых, взятые из реальных испытаний, представлены на рис. 2. При этом, например, кривая типа *1* характерна для свай с малым поперечным сечением или в случае залегания под острием более слабых грунтов; кривая типа *б*, напротив, характерна для свай большого поперечного сечения или если под острием залегают более прочные грунты.

Можно показать, что уровень надежности фундаментов спроектированных для одних и тех же зданий на участках, соответствующих кривым *1–5*, будет различным. Пусть, например, на этих участках следует запроектировать здания с предельной величиной осадки 8 см. Тогда в соответствии со СП предельное сопротивление испытываемых свай $F_{u,n}$ должно определяться при их осадках, равных 16 мм (см. рис. 2).

Исчерпание несущей способности свай в соответствии с классическим понятием «предельного состояния» в механике грунтов наступает при их срыве. Тогда величина Δ_n , равная разнице между нагрузкой на сваю при срыве и ее предельным сопротивлением по СП, может рассматриваться как предельная изменчивость внешней нагрузки. Нетрудно убедиться, что уровень надежности сваи *2* будет минимальным, а сваи *4* – максимальным (см.рис.2).

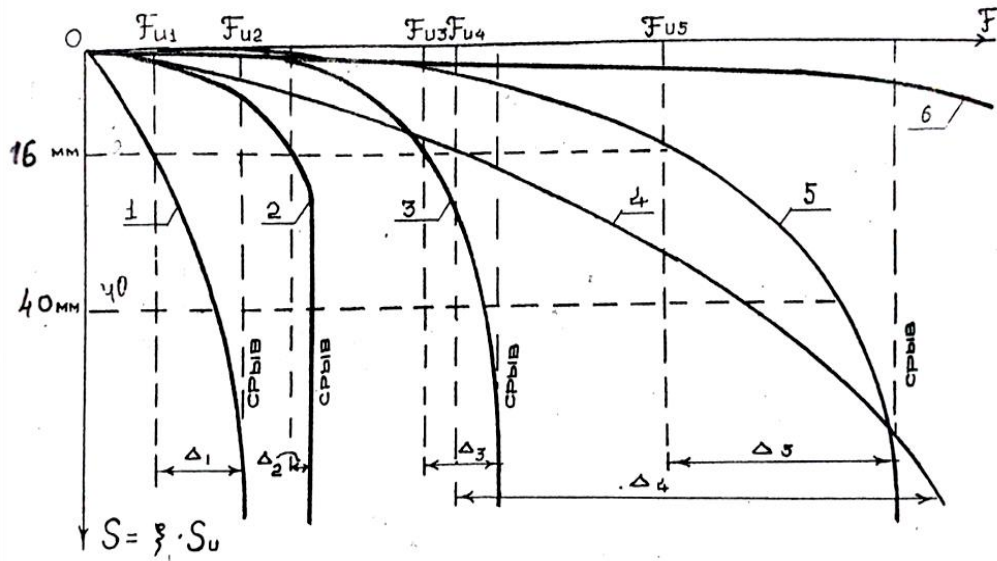


Рис. 2. Графики зависимости осадки сваи S от нагрузки F

Положение не улучшается с использованием коэффициентов перехода от величины $F_{u,n}$ к N_d в формулах (1) – (2). Если в соответствии со СП для данного случая (одиночное испытание) принять $F_{u,n} = F_u$ ($\gamma_c = \gamma_g = 1$), а $\gamma_c = 1.2$, то расчетная нагрузка на каждую сваю будет равна $N_d = F_{u,n} / 1.2$. Пусть для сваи 4 $F_{u,n} = 800$ кН, тогда $N_d = 670$ кН. Для сваи 1, соответственно, $F_{u,n} = 200$ кН, $N_d = 170$ кН. Если принять изменчивость внешней нагрузки, передаваемой одним и тем же сооружением на эти сваи, равной 50 кН, то видно, что для фундамента, составленного из свай 4, надежность обеспечена ($670 + 50 < 800$ кН), а для фундамента, составленного из свай 1, – нет ($170 + 50 > 200$ кН).

Если провести такой же анализ для зданий, допускающих величину осадки сваи 40 мм, можно показать, что разница в уровнях надежности для рассматриваемых свай будет еще большей.

Даже эти простые примеры позволяют сделать вывод, что регламентируемое СП правило определения критериев несущей способности одиночных свай и рекомендуемые коэффициенты надежности не позволяют проектировать равнонадежные фундаменты одних и тех же зданий в различных инженерно-геологических условиях. Очевидно, должны быть установлены дифференцированные их значения с учетом грунтовых условий и размеров свай.

Отметим еще некоторые недостатки в существующих рекомендациях по испытанию свай пробной статической нагрузкой. Много ошибок в интерпретации результатов испытаний свай связано с рекомендуемым ГОСТом масштабом представления графиков. На рис. 3 приведены результаты испытаний одной и той же сваи, заимствованные из работы [5]. Первая кривая построена в масштабе, рекомендованном ГОСТом (по оси нагрузки 1 см = 50 кН, по оси осадок 1 см = 1 мм). Вторая – в так называемом "натуральном масштабе" (1 см – 50 кН, 1 см = 1 см). По кривой 1 можно заключить, что осадка сваи в 10 мм является "пробальной", однако, из рассмотрения кривой 2 видно, что она еще далеко не соответствует критической нагрузке.

Испытания свай пробной статической нагрузкой крайне трудоемки и дорогостоящи. Поэтому ГОСТ в определенных условиях допускает вместо ступени нагружения, равной 1/10 заданной в программе наибольшей нагрузки, применять на начальных ступенях 1/5. Изыскатели часто используют такую методику нагружения.

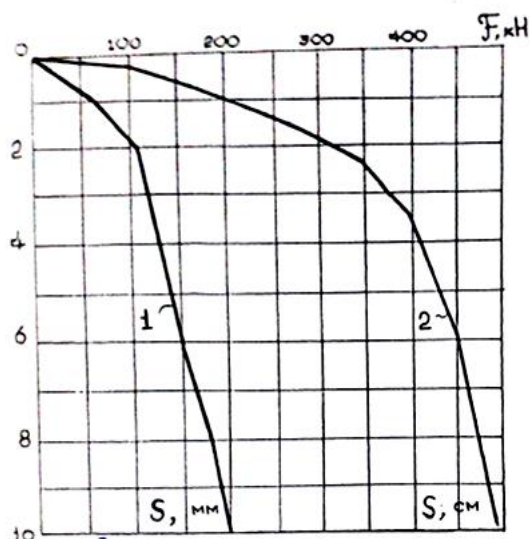


Рис. 3 Графики одного и того же испытания сваи, построенные в разных масштабах по оси S: 1 – в миллиметрах; 2 – в сантиметрах

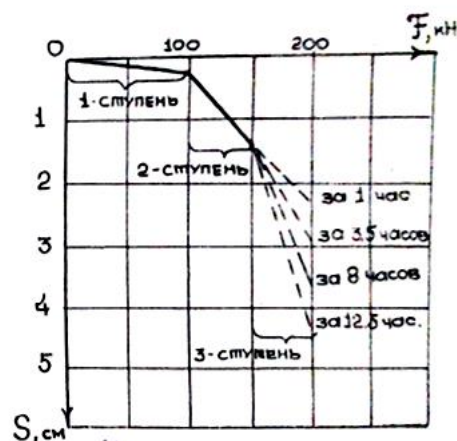


Рис. 4. Графики зависимости $S=f(F)$ при различном времени выдержки последней ступени нагрузки

Однако не всегда удается соблюдать требования ГОСТа. К примеру, на рис. 4 представлены графики зависимости осадки сваи от нагрузки, построенные по результатам испытаний одной из изыскательских организаций г. Санкт-Петербурга. Предполагаемая наибольшая нагрузка на сваю была прогнозирована расчетом и составила 400 кН. А при испытании свая достигла предельную нагрузку всего при 200 кН, что составило: для 1-ступени 1/2 часть предельного сопротивления; для 2 и 3 ступеней – 1/4, и не соответствует регламентации ГОСТа. Представленные на рис.4 данные о времени выдерживания нагрузки на последней ступени свидетельствует о том, что при установлении предельной нагрузки на сваю должна учитываться скорость деформации, приходящаяся на единицу действующей нагрузки, что не регламентируется ГОСТом.

Выводы:

- принятая сейчас методика интерпретации результатов испытаний свай пробной статической нагрузкой не обеспечивает получение достоверных данных для проектирования равнонадежных фундаментов в разнообразных грунтовых условиях;
- понятие “несущая способность одиночной сваи” не должно основываться на величинах постоянных для всех случаев деформаций или определяться в зависимости от конструктивных особенностей надфундаментных конструкций;
- должна быть разработана такая методика оценки несущей способности свай по результатам их статических испытаний, которая исключит отмеченные недостатки.

Литература

- [1] Бахолдин Б.В. Экспериментальные и теоретические исследования процесса взаимодействия грунта с забивными сваями и создание на их основе практических методов расчета свай. Дис ... докт. техн. наук. М.: 1987. – 472 с.
- [2] Березанцев В.Г. Расчет прочности оснований сооружений. Л.; М.: Госстройиздат, 1960. – 138 с.
- [3] Горбунов-Посадов М.И. О вытеснении и уплотнении грунта забивной свай // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1968. №5. С. 2 – 5.
- [4] Грутман М.С. Свайные фундаменты. Киев: Будівельник, 1969. – 192 с.
- [5] Далматов Б.И., Лапшин Ф.К., Россихин Ю.В. Проектирование свайных фундаментов в условиях слабых грунтов. Л.: Стройиздат, 1975. – 240с.
- [6] Лапшин Ф.К. Расчет оснований одиночных свай на вертикальную нагрузку. Дис... докт. техн. наук. М.: 1988. – 469 с.
- [7] СП 50 -102-2003. Свод правил по проектированию и устройству свайных фундаментов. М.: 2004.

- [8] Луга А.А. К нормам расчетных сопротивлений свай по грунту // Тр. ЦНИИС. Вып. 56. 1965. М.: Транспорт. С. 105 – 114.
- [9] СНиП II – Б. 5 – 62. Свайные фундаменты из забивных свай. М.: 1962.
- [10] Баходдин Б.В., Немов Р.А. К вопросу об определении расчетных сопротивлений грунта под нижним концом и на боковой поверхности забивных свай // Тр. НИИОСП. Вып.94. М.: 1991. С. 166–122.
- [11] Сирожиддинов З. Определение несущей способности забивных свай на основании уточнения расчетных сопротивлений пылевато–глинистых грунтов // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1992. №3. С. 14 – 17.
- [12] Голубков В.Н., Химич В.Ф. Опыт проектирования свайных фундаментов по деформациям // Изв. вузов: Строительство и архитектура. 1961. №3. С. 39–46.
- [13] Ободовский А.А. Проектирование свайных фундаментов. М.: Стройиздат, 1977. – 112 с.
- [14] Трофименков Ю.Г., Матяшевич И.А., Лецин Г.М., Ханин Р.Е. Достоверность способов определения расчетной нагрузки на забивную сваю // Основания, фундаменты механика грунтов. 1983. №1. С.15–17.
- [15] СП50–101–2004. Свод правил по проектированию и устройству оснований и фундаментов зданий и сооружений. М.: 2005.

Дата поступления
20.01. 2022

Сирожиддинов З. Қоқма қозықларнинг юк кўтара олиш қобилиятини баҳолашнинг ўзига хос хусусиятлари

Аннотация: Мақолада қоқма қозықларнинг юк кўтара олиш қобилиятини баҳолашнинг амалиётда кенг тарқалган усуллари батафсил таҳлил этилган. Ушбу усуллар амалий (жадвал) ва статик юклар таъсирида қозықларни синаш усуларидир. Амалий усулдаги қозық учи ва ён сиртидаги грунтларнинг қаршиликлари қийматлари аниқлаштиришни (такимллаштиришни) тақазо этади. Чунки уларни жадваллаштиришида қийматларни ўзгарувчанлиги ҳисобга олинмаган, ҳатто грунтларнинг асосий физик кўрсаткичларига ҳам (масалан, зоваклик коэффициентига) боғланмаган. Қозықларнинг юк кўтара олиш қобилиятини баҳолашнинг статик кучлар таъсирида синаш усули, энг аниқ усул ҳисоблансада, унинг натижаларини турли мутахассисликлар турлича талқин этадилар ва бу ҳақда яқдиллик мавжуд эмас. Таъкидлаш лозимки, қозықнинг юк кўтара олиш қобилияти турли хил ҳолатларда ўзгармас деформация қийматига асосланмаслиги ёки пойдевор устки конструкцияларнинг (бино ёки иншоотларнинг) конструктив хусусиятларига боғланмаслиги лозим.

Калит сўзлар: қоқма қозық; юк кўтара олиш қобилияти; қозық учи остидаги грунт қаршилиги; қозық ён сиртидаги грунт қаршилиги; чегаравий ҳолат; синов натижалари.

Sirojiddinov Z. Features of determining the bearing capacity of driven piles

Annotation: The article analyzes in detail the common methods for determining the bearing capacity of driven piles. It is indicated that these are the practical (tabular) calculation method and the trial static load test method. It is noted that the tabular values of soil resistance under the tip and along the side surface of the piles in the practical method of calculation need further clarification, since when compiling their tabular values, the characteristics of variability and even some basic physical indicators of soils (for example, porosity coefficients) were not taken into account). The method of assessing the bearing capacity of piles based on the test static load test results, although it is more accurate, is interpreted differently by different experts and there is no consensus on this matter. It is emphasized that the concept of the bearing capacity of a pile should not be based on the values of deformations that are constant for all cases or be determined depending on the design features of the above-foundation structures (buildings or structures).

Keywords: pile; driving; load bearing capacity; resistance under the tip; resistance along the lateral surface; ultimate load; test results.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ ПЛОТИН**Уразмухамедова З.¹, Жураев Д.¹, Маткаримов П.²**¹Национальный исследовательский университет “Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства”. Ташкент, Узбекистан²Наманганский инженерно-технологический институт. Наманган, УзбекистанEmail: ziyoda-tiame@mail.ru, diyorbekmuhammadamir@mail.ru

Аннотация: Статья посвящена определению собственных частот и форм колебаний плотины. Приведена разработанная математическая модель для оценки напряженного состояния и динамических характеристик плоских и пространственных сооружений на основе вариационного уравнения Лагранжа с использованием принципа Даламбера. Вариационная задача методом конечных элементов приводит к решению неоднородных алгебраических уравнений или алгебраических задач на собственные значения. Адекватность модели и точность полученных решений доказаны сопоставлением полученных решений с точно аналитическим решением плоской и пространственной тестовой задачи. Исследованы собственные частоты и формы колебаний гравитационной бетонной и проектируемых Кизилсайской грунтовой плотины. При этом выявлено, что в собственных формах колебаний грунтовых плотин наибольшие перемещения при низких частотах получают гребневая часть и середина откосов плотины.

Ключевые слова: гравитационная и грунтовая плотины; плоские и пространственные сооружения; собственные частоты и формы колебаний.

Введение. Одной из актуальных проблем в науке о механике является оценка напряженно-деформированного состояния (НДС) и динамических характеристик (т.е. собственных частот, форм и декремента колебаний) различных сооружений со сложной геометрией и неоднородными конструктивными особенностями. Это, в свою очередь, требует разработки и использования математических моделей и вычислительных методов для оценки динамических характеристик и прочностных параметров сооружений с учетом их конструктивных особенностей и реальных свойств материалов.

Решение указанной проблемы, с учетом вышеизложенных факторов, наиболее полно и точно можно получить, пользуясь численными методами, например методом конечных элементов (МКЭ) или методом конечных разностей (МКР) [1–6].

На сегодняшний день существует ряд научных работ, которые посвящены исследованиям напряженно - деформированного состояния и динамического поведения грунтовых сооружений как в плоской, так и в пространственной постановке.

Статическое напряженное состояние и динамическое поведение различных грунтовых плотин в плоской и пространственной постановке рассмотрены в работах [1–18], в которых учитываются конструктивные особенности сооружений, влажностные свойства грунта, взаимодействие сооружений с водной средой водохранилища и другие особенности сооружений.

В работе [18] методом конечных разностей исследовано плоско-напряженно-деформированное состояние грунтовых плотин под действием кинематического воздействия, приложенного в основании сооружения.

В [19] с помощью метода конечных элементов исследуется сейсмическая реакция бетонных гравитационных плотин в плоской постановке. В рассмотренной модели учитывается совместная работа плотины и фундамента с учетом водной среды водохранилища. Исследовано напряженное состояние для оценки предела прочности плотины.

В работе [20] описываются научные достижения и основные выводы, т.е. систематически обобщается накопленный опыт строительства высоких каменно - земляных плотин, обсуждаются основные технические вопросы, в том числе контроль деформаций, просачивания, устойчивости откосов, оценка безопасности и другие вопросы, касающиеся грунтовых плотин. В публикации [21] методом конечных элементов исследуется напряженное со-

стояние грунтовых плотин при статических и динамических воздействиях с учетом упругопластического деформирования грунта плотины и полученные численные результаты сопоставляются с результатами полевых измерений Вэньчуаньского землетрясения.

Изгибная деформация плотины была исследована в работе [22], так как изгиб часто приводил к разрушению конструкции.

В работе [23] подробно проанализировано использование нетрадиционных материалов (грунтовых и каменных смесей) для обеспечения устойчивости откосов грунтовых плотин.

Как показывает обзор, исследования напряженно-деформированного состояния и динамических характеристик грунтовых сооружений с учетом конструктивных особенностей и реальной работы (как в плоской, так и в пространственной постановках) исследовано недостаточно, поэтому проведение исследования в этом направлении представляет большой научный интерес. Прогноз поведения грунтовых сооружений должен основываться на возможно более полном учете всех факторов, влияющих на их НДС и динамическое поведение при различном роде нагрузок.

Исходя из вышеизложенного, данная статья посвящена разработке математической модели для оценки напряжённого состояния и динамических характеристик (собственных частот, форм колебаний) различных плоских и пространственных сооружений с помощью методов конечных элементов. Для оценки адекватности модели и точности полученных численных результатов решена плоская и пространственная тестовая задача, имеющая точное решение.

Материалы и методы. Рассматривается модель трехмерного деформируемого твердого тела (рис. 1), занимающая объем V .

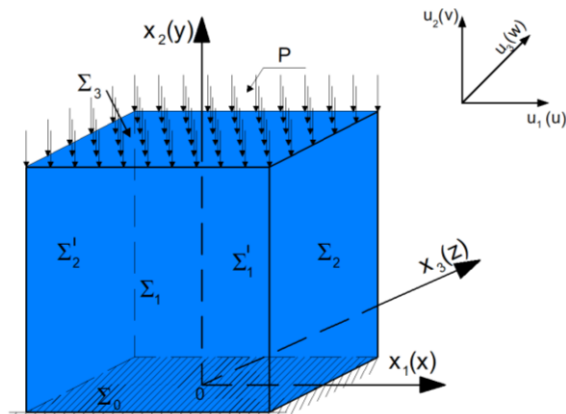


Рис. 1. Модель трехмерного деформируемого твердого тела

Нижняя поверхность тела Σ_0 жестко закреплена в основании, передняя и задняя поверхности (Σ_1, Σ_1^1) и две боковые поверхности (Σ_2, Σ_2^1) свободны от напряжений. Тело находится под действием массовых сил \vec{f} и на поверхность Σ_3 приложена распределенная нагрузка \vec{P} .

Необходимо определить напряжение, возникающее под действием нагрузок в трехмерном теле (см. рис. 1), и динамические характеристики тела при отсутствии нагрузки.

Для математической постановки задач использован принцип возможных перемещений, согласно которому сумма работ всех активных сил, действующих на систему при возможных перемещениях, равна нулю:

$$\delta A = - \int_V \sigma_{ij} \cdot \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_V \rho \ddot{u}_i \cdot \delta \bar{u}_i dV + \int_V \vec{f} \delta \bar{u} dV + \int_{\Sigma_3} \vec{P} \delta \bar{u} d\Sigma = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Физические свойства тела описываются соотношениями между напряжениями σ_{ij} и деформациями ε_{ij} в виде [24]

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2)$$

и соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (3)$$

а также граничное условие

$$\bar{x} \in \sum_0: \bar{u} = 0. \quad (4)$$

Здесь \bar{u} , ε_{ij} , σ_{ij} , – векторы перемещений, компоненты тензоров деформации и напряжений; $\delta\bar{u}$, $\delta\varepsilon_{ij}$ – изохронные вариации компонентов вектора перемещений и тензоров деформации; ρ – плотность материала тела; \bar{f} – вектор массовых сил; \bar{P}_1 – внешне распределенная нагрузка, приложенная к поверхности \sum_3 ; λ и μ – константы Ламэ; $\theta = \varepsilon_{ij}$ – объемная деформация; $\{u_1, u_2, u_3\} = \{u, v, w\}$ – компоненты вектора перемещений точки тела; $\{x\} = \{x_1, x_2, x_3\} = \{x, y, z\}$ – координаты точки тела; при решении трехмерных задач $i, j, k = 1, 2, 3$, а при решении плоских задач $i, j, k = 1, 2$.

С использованием предложенной математической модели поставленную задачу можно сформулировать таким образом:

1. Требуется определить в теле (см. рис.1) поля перемещений $\bar{u}(\bar{x}, t)$, деформации $\varepsilon_{ij}(\bar{x}, t)$ и напряжения $\sigma_{ij}(\bar{x}, t)$, возникающие под действием массовых (\bar{f}) и поверхностных (\bar{P}) сил, удовлетворяющих уравнениям (1)–(3) и граничным условиям (4) при произвольных возможных перемещениях $\delta\bar{u}$ (в этом случае виртуальная работа сил инерции в (1) не учитывается).

2. Требуется определить собственные частоты и формы колебаний тела (см. рис.1), занимающие объем V (при отсутствии внешних нагрузок), удовлетворяющих уравнениям (1)–(3) и граничным условиям (4) при произвольных возможных перемещениях $\delta\bar{u}$ (при этом виртуальная работа массовых и поверхностных сил в (1) не учитывается).

При решении плоских задач использованы треугольные элементы с 6 степенями свободы, а в трехмерных задачах – суперэлементы в виде параллелепипедов с 18 степенями свободы.

С использованием процедуры метода конечных элементов [25] вариационная задача (1) при действии статических нагрузок сводится к решению системы неоднородных алгебраических уравнений высокого порядка, т.е.

$$[K]\{u\} = \{P\}. \quad (5)$$

Здесь $[K]$ – матрица жесткости для рассматриваемого тела (см. рис.1); $\{u\}$ – искомые компоненты векторов перемещений в узлах конечного элемента; $\{P\}$ – компоненты внешней (массовых и поверхностных) силы, действующей на узлы конечного элемента.

При определении динамических характеристик (т.е. собственных частот и форм колебаний) тела, вариационная задача (1) методом конечных элементов приводится к определению собственных значений и собственных функций однородного алгебраического уравнения:

$$([K] - \omega^2[M])\{\bar{u}\} = 0. \quad (6)$$

Здесь $[K]$, $[M]$ – матрица жесткости и массы рассматриваемого тела (см. рис.1); ω , $\{\bar{u}\}$ – соответственно собственная частота и форма колебаний тела; $[K]$, $[M]$ – матрицы с ленточной структурой, что облегчает нахождение собственных значений $\lambda = \omega^2$ и собственных векторов $\{\bar{u}\}$ характеристического определителя уравнений (6).

Уравнения высокого порядка (5) и (6) решены с помощью программы ABAQUS. При решении конкретных задач количество неизвестных в этих уравнениях доходило до 50000.

Тестовые задачи. С использованием вышеприведенной математической модели и метода решено несколько тестовых задач.

Задача. Рассматривается напряженное состояние прямоугольного длинного параллелепипеда (рис.2), находящегося на абсолютно жестком и скользящем основании, т. е. $y=0$; $u_1=0$; $\sigma_{12}=0$ в состоянии плоской деформации под действием распределенной нагрузки P .

Необходимо определить значение компонентов вектора перемещений (u_1, u_2) и тензора напряжений ($\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$) в любой точке тела (см. рис.2). Полученные результаты необходимо сравнивать с точно аналитическим решением [26]. В расчетах использованы следующие исходные данные: $P=1.0$; $a=b=1.0$; $E=1.0$; $\nu=0.25$.

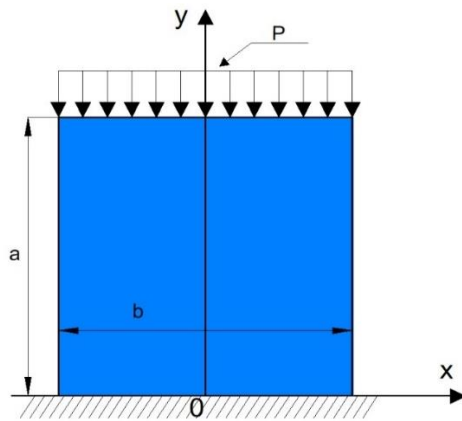


Рис. 2. Деформируемый параллелепипед, находящийся на скользящем основании

Точное решение данной задачи приведено в литературе [26] и имеет вид

$$u_1 = \frac{\nu(1+\nu)}{E} x_1; \quad u_2 = -\frac{(1-\nu^2)}{E} x_2;$$

$$\sigma_{22} = -P; \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{11} = 0.$$

Сравнение полученных авторами численных результатов с точными решениями (т.е. компоненты вектора перемещений – u_1, u_2) приведены в табл.1.

Таблица 1

Сравнение численного и точного решения в плоской задаче

№	Координаты точек		Точное решение [26]		Численное решение, полученное авторами		Разница в процентах	
	x	y	u_1	u_2	u_1	u_2	u_1	u_2
1.	0.25	0	0.078125	0.000	0.077500	0.000	0.8%	0%
2.	0.125	0	0.03906	0.000	0.038250	0.000	2.1%	0%
3.	0.5	1	0.15625	-0.9375	0.15600	-0.92900	0.2%	1%
4.	0.5	0.375	0.15650	-0.35156	0.15300	-0.36500	2.3%	2.3%
5.	0.5	0.75	0.15650	-0.70312	0.15500	-0.71000	1%	2%
6.	-0.375	1	-0.11718	0.9875	-0.099750	-1.000	2.3 %	2 %
7.	-0.375	0	0.1171875	0.000	-0.093750	0.000	2.3%	0%
8.	-0.391	0.308	-0.122236	-0.28941	-0.117894	-0.29871	2.4%	1.9%
9.	-0.192	0.89	-0.060181	-0.83504	-0.059145	-0.84071	1.2%	1.3%
10.	0.391	0.69	0.1220968	-0.64929	0.119678	-0.65258	2.4%	1.6%
11.	0.404	0.18	0.126315	-0.17316	0.12105	-0.17471	2.5%	1.1%
12.	-0.065	0.11	-0.020045	-0.10144	-0.019362	-0.11143	0.3%	0.69%
13.	0.271	0.77	0.084825	-0.72223	0.083908	-0.73053	1.3%	2.3%
14.	0.283	0.628	0.08863	-0.58934	0.087908	-0.58863	1.7%	3.9%
15.	-0.13	0.22	-0.04158	-0.2082	-0.04097	-0.21208	0.8	1.3%
16.	-0.058	0.64	-0.018436	-0.60175	-0.018474	-0.60175	0.3%	4%
17.	0.840	0.66	0.026671	-0.61912	0.026514	-0.61840	0.5%	1.2%
18.	-0.06	0.476	-0.019276	-0.44616	-0.019321	-0.45991	0.3%	2.97%

Задача. Здесь та же задача рассмотрена в трехмерной постановке, и полученные численные результаты сопоставлялись с точным решением [26] (табл. 2). При этом точное значение компонента тензора напряжения имеет следующий вид: $\sigma_{22}=-P$; $\sigma_{11}=\sigma_{33}=\sigma_{12}=\sigma_{13}=\sigma_{23}=0$.

Таблица 2

Сравнение численного и точного решения трехмерных задач

№	Название	σ_{11}	σ_{22}	σ_{33}	σ_{12}	σ_{13}	σ_{23}
1	Точное решение [26]	0	-1	0	0	0	0
2	Численное решение, полученное автором	-55 E-18	-1	-222 E-18	-44 E-18	-266 E-18	-310 E-18
3	Разница, %	0	0	0	0	0	0

Сравнение полученных результатов, приведенных в табл. 1 и 2, показывает, что численные решения в плоских и пространственных постановках говорят о достаточно хорошей сходимости полученных результатов. Следовательно, результаты, полученные с помощью предлагаемой авторами модели и методики, позволяют оценить напряженно-деформированное состояние не только простых, но и достаточно сложных конструкций с достаточно большой точностью.

Результаты и выводы. Решается задача о собственных колебаниях бетонной гравитационной плотины треугольного профиля с вертикальной напорной гранью, расположенной на жестком основании (рис. 3), со следующими параметрами: высота плотины $h=100$ м, ширина у основания $b=75$ м; марка бетона $M-100$ и его характеристика $E=2.5 \cdot 10^6$ тс/м², $\gamma=2.4$ тс/м³, $\nu=0.17$. Плотина работает в плоскодеформированном состоянии. Определяются собственные частоты колебаний для бетонной гравитационной плотины при полном заполнении и опорожненном состоянии водохранилища.

Полученные собственные частоты колебания плотины без учета влияния воды сравниваются с результатами работы [4], которые приведены в табл. 3. Сопоставление собственных частот колебаний в опорожненном состоянии плотины показывает практическую сходимость полученных результатов, так как разница для низших частот составляет менее 3%.

Далее определяются собственные частоты колебаний для бетонной гравитационной плотины (см. рис.3) с учетом давления воды при полном заполнении водохранилища. Задача решается с помощью предлагаемой авторами модели и методики, и полученные результаты сопоставлены с результатами работы [4]. Плотность воды принята $\gamma=1.0$ тс/м³.

В табл. 3 приводится значение собственной частоты, полученное с учетом (ω_{vi}) и без учета (ω_i) давления воды.

Таблица 3

Сравнение собственных частот гравитационной плотины полученных разными авторами

Собственная частота, рад/с	Полученные результаты в [4]	Полученные результаты авторами (без учета воды)	Полученные результаты авторами с учетом воды
ω_1	27.5	26.8	26.3
ω_2	64.8	63.4	61.41
ω_3	73.6	72.8	72.05
ω_4	114.2	110.7	104.77
ω_5	161.4	159.6	152.81
ω_6	200.7	178.3	160.34
ω_7	-	199.4	199.26
ω_8	-	214.8	200.89

Сравнение полученных результатов (см. табл.3) для гравитационных плотин (см. рис.3) с учетом и без учета давления воды показывает, что результаты, полученные авторами, имеют более высокую точность, поскольку при решении данной задачи авторы использовали большое количество конечных элементов чем в работе [4] при разбиении плотины на конечные элементы. При этом показано, что использование данной модели и методики дает возможность определить динамические характеристики плотины со сложной геометрией и неоднородной конструктивной особенностью.

Задача. Динамические характеристики (собственные частоты, формы колебаний) являются основными регламентирующими характеристиками (паспортом) сооружений, позволяющими заранее судить о его динамических свойствах и его поведении при различных воздействиях, в том числе и при самых нежелательных в резонансных режимах его работы.

Поэтому в данной задаче в условиях плоской деформации и в упругой постановке рассматриваются собственные колебания грунтовых плотин Кизилсайского водохранилища (рис. 4).

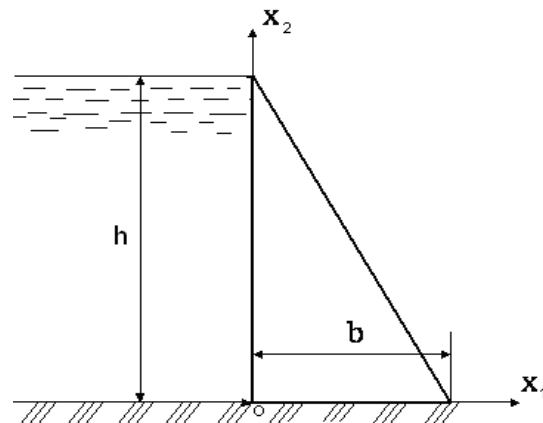


Рис.3. Расчетная схема бетонной гравитационной плотины с учетом водной среды в водохранилище

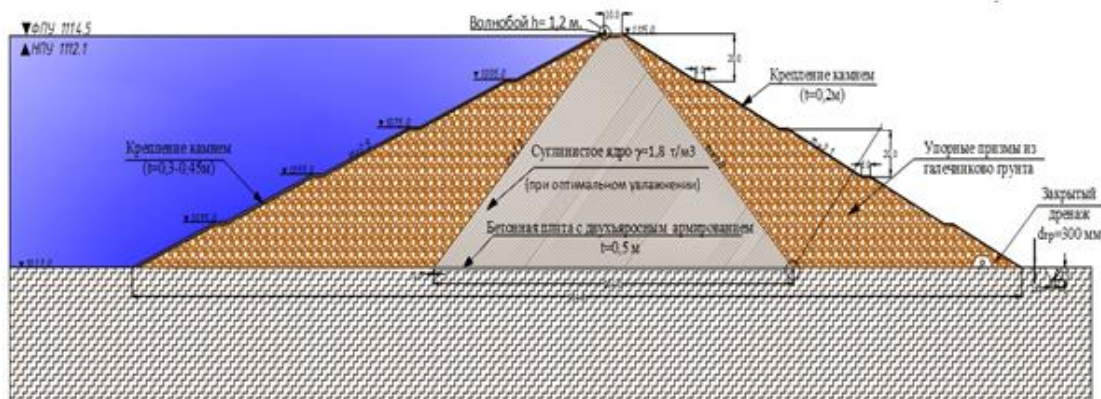


Рис. 4. Расчетная схема проектируемой Кизилсайской грунтовой плотины: 1—центральное ядро; 2 —переходные зоны; 3 и 4— верхняя и нижняя упорные призмы; 5,6 – верхние и нижние откосы

Необходимо определить собственные частоты и собственные формы колебаний проектируемой Кизилсайской грунтовой плотины.

При численных расчетах конструктивные особенности геометрии плотины и физико-механические характеристики материалов плотины получены из проектной документации, т.е. высота плотины $H=83$ м, ширина гребня $b=20$ м, коэффициенты низового и верхового откоса – $m_1=2.5$, $m_2=2.1$; средние механические характеристики грунта – $E=3100$ кгс/см²; $\gamma=2,0$ тс/м³ и $\nu=0.30$.

На основе этих данных с помощью разработанной модели и методики определены собственные частоты ω_i и построены соответствующие формы колебаний данной плотины.

На рис. 5 приведены полученные собственные частоты и формы колебаний Кизилсайской грунтовой плотины.

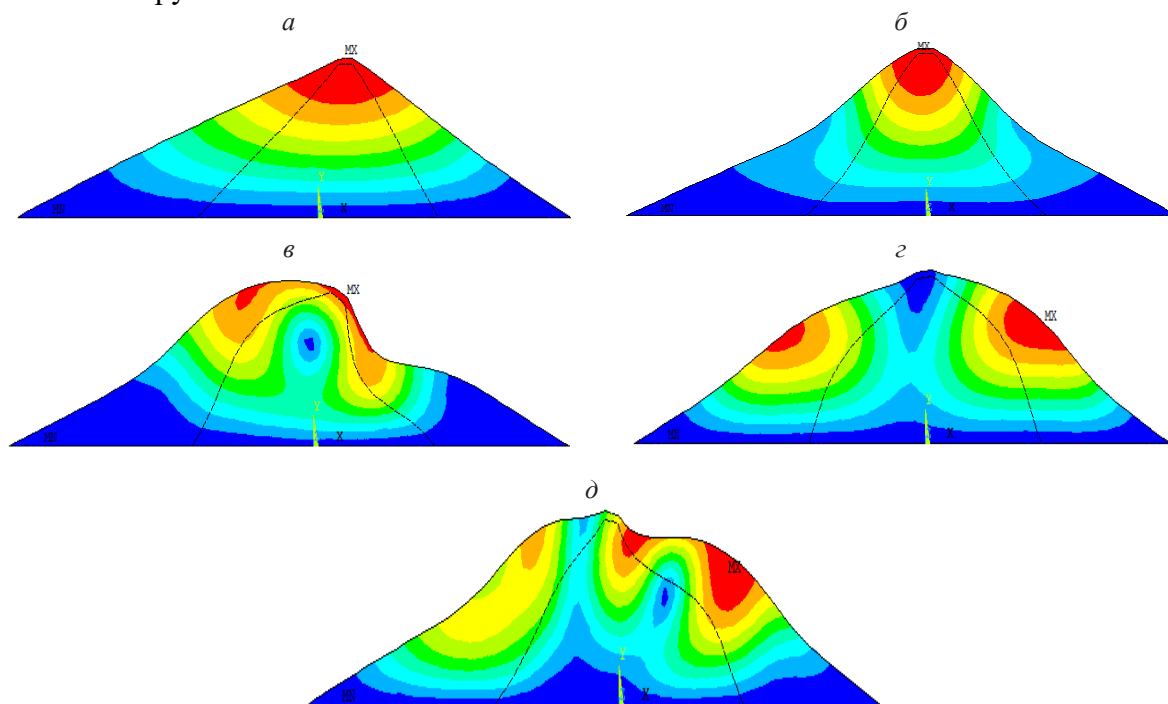


Рис. 5. Собственные частоты и формы колебаний Кизилсайской грунтовой плотины: а – первая форма колебания при $\omega_1=0.9677$ рад/с; б – вторая форма колебания при $\omega_2=1.3965$ рад/с; в – третья форма колебания при $\omega_3=1.6055$ рад/с; г – четвертая форма колебания при $\omega_4=1.6970$ рад/с; д – пятая форма колебания при $\omega_5=2.0558$ рад/с

Анализ собственных частот показывает, что значения третьей и четвертой собственных частот достаточно близки между собой. Анализ собственных форм колебаний свидетельствует о том, что первая форма описывает изгибную деформацию, а вторая

форма–продольную деформацию. При этом наибольшие амплитуды перемещений приходятся на гребную часть плотины. Третья, четвертая и пятая формы колебаний описывают сложную деформацию плотины, при этом в этих формах колебаний наибольшие амплитуды перемещения приходятся на середину откосной части плотины. При четвертой и пятой формах колебаний возникают большие деформации в середине низового откоса плотины, а в третьей форме наибольшие деформации наблюдаются вблизи гребня верхового и низового откосов.

Заключение.

1. Для оценки напряженного состояния и динамической характеристики плоских и пространственных сооружений разработана математическая модель на основе вариационного уравнения Лагранжа с использованием принципа Даламбера.

2. Рассматриваемые вариационные задачи для плоских и пространственных сооружений с использованием методов конечных элементов сводились, при определении напряженного состояния, к большому порядку неоднородной алгебраической задачи, а в случае определения динамических характеристик – к большому порядку алгебраической задачи на собственные значения.

3. Адекватность математической модели и точность полученных результатов проверены сопоставлением полученных решений плоских и пространственных тестовых задач с известными точными решениями.

4. Исследование собственных частот и формы колебаний гравитационных и грунтовых плотин показало, что предложенная методика позволит оценить динамические характеристики различных плотин с достаточно сложной геометрией и конструктивными особенностями.

5. Выявлены:

- учет давления воды на незначительную величину снижает собственную частоту гравитационной плотины, практически не изменяя собственных форм колебаний;

- в рассмотренной грунтовой плотине первая и вторая формы колебаний описывают в некоторой степени простую деформацию сооружения, а другие выше формы собственных колебаний описывают сложную деформацию плотины.

Литература

- [1] *Зарецкий Ю.К., Ломбардо В.Н.* Статика и динамика грунтовых плотин. М.: Энергоиздат, 1983. –256 с.
- [2] *Красников Н.Д.* Сейсмостойкость гидротехнических сооружений из грунтовых материалов. М.: Энергоиздат, 1981. –240 с.
- [3] *Ляхтер В.М., Иващенко И.Н.* Сейсмостойкость грунтовых плотин. М.: Наука, 1986. –233 с.
- [4] *Константинов И. А.* Динамика гидротехнических сооружений. Часть 2. Л.: Изд. ЛПИ, 1976. –196 с.
- [5] *Мирсаидов М.М.* Теория и методы расчета грунтовых сооружений на прочность и сейсмостойкость. Ташкент: Фан, 2010. –312 с. (монография).
- [6] *Мирсаидов М.М., Султанов Т.З.* Оценка динамической прочности грунтовых плотин с учетом нелинейного деформирования. Ташкент: «Адабиёт учқунлари», 2018. – 258 с. (монография).
- [7] *Sultanov T., et al.* Strength assessment of earth dams // MATEC Web of Conferences. Vol. 265. 2019. No. 04015.
- [8] *Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Rumi D.F.* An assessment of dynamic behavior of the system "structure - Foundation" with account of wave removal of energy. Magazine of Civil Engineering. 2013. 39(4). P. 94–105.
- [9] *Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z.* Assessment of stress-strain state of earth dams with allowance for non-linear strain of material and large strains. Magazine of Civil Engineering. 2014. N 49(5). С. 73–82+136–137.
- [10] *Sultanov T.Z., Khodzhaev, D.A., Mirsaidov, M.M.* The assessment of dynamic behavior of heterogeneous systems taking into account non-linear viscoelastic properties of soil. 2014. Magazine of Civil Engineering. N 45(1). С. 80–89. DOI: 10.5862/MCE.45.9.
- [11] *Pinyol N.M., Alonso E.E.* Earth dam, spatial model, stress-strain state, dynamic characteristic, natural frequency, modes of oscillations // International Journal of Civil Engineering. Vol. 17. 2019. No. 4. P. 501–513.
- [12] *Nariman N.A., Lahmer T., Karampour P.* Uncertainty quantification of stability and damage detection parameters of coupled hydrodynamic-ground motion in concrete gravity dams // Frontiers of Structural and Civil Engineering. Vol. 13. 2019. No. 2. P. 303– 323.
- [13] *Li Y., Li K., Wen L., Li B., Liu Y.* Safety standard for slopes of ultra-high earth and rock-fill dams in china based on reliability analysis // International Journal of Civil Engineering. Vol. 17. 2019. P. 1–16.

- [14] Fu Z., Chen S., Li G. Hydrodynamic pressure on concrete face rockfill dams subjected to earthquakes // Journal of Hydrodynamics. Vol. 31. 2019. No. 1. P. 152–168.
- [15] Wang M., Chen J., Xiao W. Experimental and numerical comparative study on gravity dam-reservoir coupling system // KSCE Journal of Civil Engineering. Vol. 22. 2018. No. 10. P. 3980–3987.
- [16] Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Sadullaev A. Determination of the stress-strain state of earth dams with account of elastic-plastic and moist properties of soil and large strains. Magazine of Civil Engineering. 2013. N 40(5). P. 59–68. DOI: 10.5862/MCE.40.7.
- [17] Mirsaidov M. An account of the foundation in assessment of earth structure dynamics. 2019. E3S Web of Conferences. 97, 04015. DOI: 10.1051/e3sconf/20199704015.
- [18] Khusanov B., Khaydarova O. Stress-strain state of earth dam under harmonic effect. E3S Web of Conferences 97, 05043 (2019). <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20199705043>.
- [19] Ufuk Sen, Ayman M. Okeil. Effect of biaxial stress state on seismic fragility of concrete gravity dams. Earthquakes and Structures. Vol. 18. 2020. Num. 3. P. 285–296. DOI: <http://dx.doi.org/10.12989/eas.2020.18.3.285>.
- [20] Mirsaidov M.M., Toshmatov E.S. Spatial stress state and dynamic characteristics of earth dams. Magazine of Civil Engineering. 2019. 89(5), P. 3–15. DOI: 10.18720/MCE.89.1.
- [21] Kong X., Liu J., Zou D. Numerical simulation of the separation between concrete face slabs and cushion layer of Zipingpu dam during the Wenchuan earthquake // Science China Technological Sciences. Vol. 59. 2016. No. 4. P. 531–539.
- [22] Esmaeilzadeh M., Talkhablou M., Ganjalipour K. Arching parametric study on earth dams by numerical modeling // Indian Geotechnical Journal. Vol. 48. 2018. No. 4. P. 728–745.
- [23] Alonso E.E., Cardoso R. Behavior of materials for earth and rockfill dams // Frontiers of Structural and Civil Engineering. Vol. 4. 2010. No. 1. P. 1–39.
- [24] Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1990. – 400с.
- [25] Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и МКЭ. М.: Стройиздат, 1982. – 448с.
- [26] Рекач В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости. М.: Высшая школа, 1977. – 215 с.

Дата поступления

09.12.2022 г.

Ўразмуҳаммедова З., Жўраев Д., Маткаримов П. Тўғонларнинг хусусий частоталари ва тебраниш формаларини аниқлаш.

Аннотация: Ушбу мақола тўғонларнинг хусусий частоталари ва тебраниш формаларини аниқлашга бағишланган. Даламбер тамойилидан фойдаланган ҳолда Лагранж вариацион тенгламаси асосида текис ва фазовий иншоотларнинг кучланганлик ҳолати ва динамик хусусиятларини баҳолаш бўйича ишлаб чиқилган математик модел тақдим этилган. Чекли элементлар усули билан вариацион масала бир жинсли бўлмаган алгебраик тенгламаларни ёки алгебраик хос қиймат масалаларини ечишга олиб келинган. Текис ва фазовий ҳолатларда олинган натижаларни аниқ аналитик ечимлар билан солиштириш орқали фойдаланилган моделнинг адекватлиги ва олинган ечимларнинг тўғрилиги исботланган. Гравитацион бетонли ва лойиҳаланаётган Қизилсой грунтли тўғонларининг хусусий частоталари ва тебраниш формалари ўрганилган. Шу билан бирга, грунтли тўғонларнинг хусусий тебраниш формаларидаги энг катта кўчишлар тўғоннинг тепа қисми ва ён нишабликларининг ўрталарида паст частоталарда содир бўлиши аниқланган.

Калит сўзлар: гравитацион ва грунтли тўғонлар; текис ва фазовий иншоот; хусусий частота ва тебраниш формаси.

Urazmuhammedova Z., Jurayev D., Matkarimov P. Determination of the own frequencies and forms of vibrations of dams.

Annotation. The article is devoted to the determination of own frequencies and vibration modes of the dam. A developed mathematical model is presented for assessing the stress state and dynamic characteristics of flat and spatial structures on the basis of the Lagrangian variational equation using the d'Alembert principle. The variational problem by the finite element method leads to the solution of inhomogeneous algebraic equations or to the solution of algebraic eigenvalue problems. The adequacy of the model and the accuracy of the obtained solutions are proved by comparing the obtained solutions with the exact analytical solution of the plane and spatial test problem. The own frequencies and modes of vibration of the gravitational concrete dam and the projected Kizilsay earth dam have been investigated. At the same time, it was revealed that in the natural modes of vibrations of earth dams, the greatest displacement at low frequencies is obtained by the ridge part and the middle of the slopes of the dam.

Keywords: gravity and earth dams; flat and spatial structures; own frequencies and vibration modes.

МЕТОДИКИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ КРУГЛОЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ СКОЛЬЖЕНИЯ И ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ГРУНТОВЫХ ОТКОСОВ

Умархонов С.И.¹, Норматов Ш.И.², Хайдарова О.М.¹

¹Институт механики и сейсмостойкости сооружений им.М.Т.Уразбаева АН РУз. Ташкент, Узбекистан

²Наманганский инженерно-строительный институт. Наманган, Узбекистан

E-mail: umarkhonov@gmail.com

Аннотация: Статья посвящена оценке устойчивости однородных грунтовых откосов. Проанализированы существующие методы расчета устойчивости, основывающиеся на предположении о достижении предельного сопротивления сдвигу только на поверхности скольжения, которые рекомендованы в нормативных документах и широко используются на практике. Разработана методика определения параметров круглоцилиндрической поверхности скольжения, соответствующей минимальному значению коэффициента устойчивости. Оценена устойчивость грунтовых откосов и результаты сопоставлены с результатами, полученными различными методами расчетов инженерного подхода. Показаны преимущества методики и существующей области, обеспечивающие минимум коэффициенту устойчивости, лежащему за пределами выделенной области при применении традиционными способами.

Ключевые слова: грунт; откос; устойчивость откосов; поверхность скольжения; оценка устойчивости.

Введение. Задачи исследования устойчивости грунтовых откосов возникают при проектировании и эксплуатации сооружений гидротехнического, промышленного, гражданского, транспортного и других назначений на основании, имеющем откосы и уклоны. При этом в качестве грунтовых откосов выступают основания, откосы плотин, насыпей и выемок, борта и уступы глубоких карьеров, естественные склоны при их хозяйственном использовании. Под устойчивостью грунтовых откосов обычно понимают их способность в течение длительного времени противостоять сдвигающим усилиям, сохраняя свою форму. Устойчивое положение откосов и склонов определяется соответствующим напряженно-деформированным состоянием, формируемым силовыми воздействиями. При неблагоприятном сочетании разнообразных факторов грунтовое основание или массив (борта карьеров или плотина), ограниченный откосом или склоном, может перейти в неравновесное состояние и потерять устойчивость [1 – 5]. Использование в проектной практике большого числа расчетных методов оценки устойчивости свидетельствует о сложности задачи и незавершенности ее решения. Это стимулирует разработку новых, более совершенных методов оценки устойчивости, использующих более общие расчетные схемы, в которых в предельном состоянии удовлетворяются все условия равновесия, а также эффективных методов поиска опасной поверхности сдвигов. Само понятие оценки устойчивости также совершенствуется и приобретает уточненное смысловое значение. Не до конца изученные вопросы составляют единую проблему обеспечения устойчивости грунтовых массивов [5–9].

Одна из первых программ расчета устойчивости откосов REAME для ЭВМ, реализующей метод кругло-цилиндрической поверхности скольжения по Феллениусу, была создана во второй половине прошлого века [3 – 10]. Далее были разработаны и успешно применены для расчета устойчивости откосов аналогичные программы Ruzobish (ВНИИ ВОДГЕО, Харьков), "Откос" (Гидропроект им. С.Я.Жука), GALOSH (ВНИИГ им. Б.Е.Веденеева). В последнее время с интенсивным развитием компьютерных технологий значительные изменения произошли в методологии расчетов устойчивости грунтовых откосов и обусловило создание программного обеспечения для расчета устойчивости откосов экономически целесообразным и оправданным, что в свою очередь привело к широкому использованию в инженерной практике. Стало возможным выполнять расчеты для откосов со сложной геометрией, учитывать в расчетах дополнительные нагрузки, изменяющиеся во

времени, элементы структурного укрепления откосов, воздействия сейсмических и грунтовых вод и т.д. Визуальный контроль данных, а также графический вывод результатов позволили понять о процессе гораздо больше, чем просто вычисление коэффициента устойчивости. Сейчас на рынке имеется целый ряд программных продуктов для расчета устойчивости откосов, среди них наиболее известными являются [11] программы компании GeoSlope и SoilVision, GEO5 компании Fine, GeoStab программного комплекса для геотехнических расчетов фирмы ООО "ИнжПроекСтрой", программа ОТКОС компании КРЕДО-ДИАЛОГ, программа "Откос". Версия 1.5 программного комплекса SCAD-Soft, ПО ОАС Полоцкого университета, пакет программ для анализа устойчивости склона ВОДГЕО, ANSYS, PLAXIS и др.

Одним из главных вопросов расчета и оценки устойчивости грунтовых откосов является определение формы и положения критической поверхности скольжения, соответствующими минимальному коэффициенту устойчивости. Для расчета устойчивости в настоящее время разработаны многочисленные методы в рамках теории предельного равновесия грунтов на сдвиг [12 – 16]. В качестве потери устойчивости считается скольжение некоторой части грунтового массива относительно неподвижной части откоса грунта. Граница раздела оползающего массива с неподвижной частью грунта подразумевается поверхностью скольжения. Сопротивление сдвигу грунта по этой поверхности скольжения рассчитывается для статических условий. Вдоль всей поверхности скольжения принимается критерий разрушения грунта в виде закона Кулона – Мора:

$$\tau = \mu \cdot \sigma_N + C = \sigma_N \cdot tg \phi + C , \quad (1)$$

где τ , σ_N – касательное (сдвигающее) и нормальное напряжения вдоль поверхности скольжения; C , ϕ – удельное сцепление и угол внутреннего трения грунта. Расчетное сдвигающее напряжение сопоставляется с предельным сопротивлением сдвигу (1) грунта, а результат этого сравнения выражается в виде коэффициента устойчивости. Как правило, величину коэффициента устойчивости откоса, скорее всего, принято определять как отношение суммы удерживающих и сдвигающих факторов, возникающих по поверхности возможного скольжения, и при этом значение коэффициента устойчивости должно иметь минимальное значение. В общем случае коэффициент запаса устойчивости определяется как отношение величины удерживающих и сдвигающих факторов. В предельном напряженном состоянии эта формула, выражающая коэффициент устойчивости, имеет вид [17 – 20]

$$k = \frac{F_{удер}}{F_{сдвиг}} , \quad (2)$$

где $F_{удер}$, $F_{сдвиг}$ – удерживающие и сдвигающие факторы, действующие вдоль наиболее вероятной поверхности скольжения. Наиболее популярными до настоящего времени являются методы, основывающиеся в предположении о достижении предельного сопротивления сдвигу только на поверхности обрушения, широко использующиеся в инженерной практике. Целью данной статьи является отыскание параметров круглоцилиндрической поверхности скольжения, дающее минимальное значение коэффициента устойчивости (2). Заметим, что обычно для нахождения центра круглоцилиндрической поверхности скольжения используется метод итерации, т.е. ищется самая критическая поверхность скольжения. В статье созданный метод и алгоритм отыскания всевозможных критических поверхностей позволяет найти не менее (в зависимости от пользователя) 10 поверхностей скольжения, в том числе соответствующие минимальному значению коэффициента устойчивости.

Постановка задачи. В инженерных расчетах, как обычно, поверхность обрушения предполагается круглоцилиндрической или плоской, а в некоторых случаях – произвольной [18 – 24]. В качестве факторов в (2) могут служить силы, действующие вдоль возможной поверхности скольжения или в случае круглоцилиндрической поверхности скольжения по методу Терцаги сил моментов относительно центральной оси цилиндра. Если s – дуговая

координата линии скольжения (рис.1), форма и положение которой известны, то криволинейные интегралы могут быть заменены на определенные и величина коэффициента запаса устойчивости K может быть найдена по формуле

$$K = \frac{\int_c M_{удер} dl}{\int_c M_{сдвиг} dl} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} \left[f\gamma(y-p)\cos\alpha + \frac{c}{\cos\alpha} \right] dx}{\int_{x_1}^{x_2} \gamma(y-p)\sin\alpha dx}, \quad (3)$$

где γ – удельный вес грунта; c и f – сцепление и коэффициент угла внутреннего трения $f=tg\phi$; α – угол между касательными линиями поверхности скольжения и вертикальной линией; p – функция, описывающая профиль поверхности откоса или склона; y_1 – функция, выражающая поверхность обрушения: x_1 и x_2 – ординаты границ поверхности обрушения (см.рис.1).

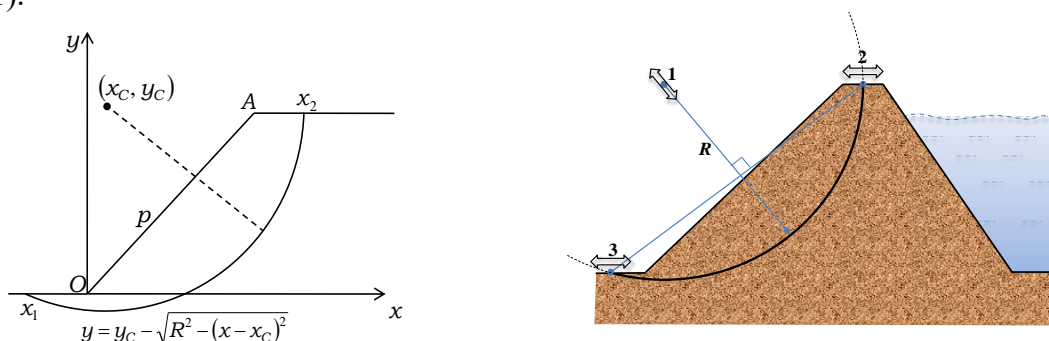


Рис.1. Схема расчёта для круглоцилиндрической поверхности скольжения

Напомним, что из-за неоднородности и геологической особенности грунтового откоса удельный вес, сцепление и коэффициент угла внутреннего трения зависят от координат x , y , а функции p и y_1 являются произвольными от x . Функция, описывающая профиль плоской поверхности откоса;

$$p = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ x/m & 0 \leq x \leq x_A, \\ h & x \geq x_A \end{cases}$$

где $h=y_A$ – высота откоса; $m=x_A/y_A=x_A/h$ – коэффициент заложения откоса. В случае круглоцилиндрической поверхности скольжения функция, описывающая профиль поверхности обрушения, согласно круглоцилиндрической поверхности (дуги окружности), имеет вид $y = y_c - \sqrt{R^2 - (x - x_c)^2}$, где (x_c, y_c) и R – координаты центра и радиус окружности, дуга которой описывает профиль предполагаемой поверхности обрушения. Отсюда видно, что функция y_1 непрерывная и непрерывно дифференцируемая, а функция p непрерывно дифференцируемая кусочно. Естественно, для функции (3) существует точка (x_c, y_c) , которая имеет минимальное значение.

Функция y – непрерывная и непрерывно дифференцируемая, а функция p – непрерывно дифференцируемая кусочно. Производная функция y :

$$y' = \frac{dx}{dy} = \frac{x - x_c}{\sqrt{R^2 - (x - x_c)^2}} = -\frac{x - x_c}{y - y_c}, \quad \sin\alpha = \frac{x - x_c}{R}, \quad \cos\alpha = \frac{y - y_c}{R} \frac{y - y_c}{R}. \quad (4)$$

Интеграл в знаменателе (3) равен

$$M_{сдвиг} = \int_{x_1}^{x_2} \gamma(y-p)\sin\alpha dx = -\int_{x_1}^{x_2} \gamma(y-p) \frac{x - x_c}{R} dx = \frac{1}{R} \{A_2 x_1^2 + B_2 x_2^2 + A_1 x_1 + B_1 x_1 + C_1\}, \quad (5)$$

где

$$A_2 = \frac{\gamma c}{2}, \quad A_1 = -\gamma c x_c = -2x_c A_2, \quad B_2 = -\frac{\gamma c}{2} + \frac{\gamma x_A}{2m} = -\frac{\gamma}{2}(y_c - h),$$

$$B_1 = \gamma c y_c - \gamma c \frac{x_A}{m} = \gamma c (y_c - h), \quad C_1 = \gamma c h \{(y_c - h)^2 + y_c (y_c - h) + y_c^2\} + \gamma x_A h \left(\frac{x_c}{2} - \frac{x_A}{6} \right). \quad (6)$$

Интеграл в числителе (5) имеет вид

$$F_{y_{\text{деп}}} = \int_{x_1}^{x_2} \left[f\gamma(y-p)\cos\alpha + \frac{c}{\cos\alpha} \right] dx = F_{y_{\text{деп1}}} + F_{y_{\text{деп2}}}, \quad (7)$$

где $F_{y_{\text{деп1}}} = \int_{x_1}^{x_2} f\gamma(y_1 - p)\cos\alpha dx$, $F_{y_{\text{деп2}}} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{c}{\cos\alpha} dx$.

Вычисляя эти интегралы, находим выражения коэффициента устойчивости (5) в удобном виде

$$K = \frac{\frac{1}{R} \left\{ A_3 x_1^3 + B_3 x_2^3 + A_{21} x_1^2 + B_{21} x_2^2 + A_{11} x_1 B_{11} x_2 + R^2 (x_1 - x_2) + C_2 + \right.}{\left. + D_1 R^2 \arcsin \frac{(x_1 - x_c)}{R} + D_2 R^2 \arcsin \frac{(x_2 - x_c)}{R} + D_3 R^2 \arcsin \frac{x_A - x_c}{R} \right\}}{\frac{1}{R} \{ A_2 x_1^2 + B_2 x_2^2 + A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1 \}}, \quad (8)$$

где

$$A_3 = -\frac{\gamma f}{3}, \quad B_3 = \frac{\gamma f}{2} = -A_3, \quad A_{21} = \gamma f x_c, \quad B_{21} = -\gamma f x_c = -A_{21}, \quad A_{11} = \gamma f \left(x_c^2 + \frac{y_c^2}{2} \right),$$

$$B_{11} = -\gamma f \left(x_c^2 + \frac{(h - y_c)^2}{2} \right), \quad D_1 = \frac{\gamma f}{2} y_c + c, \quad D_2 = \frac{\gamma f}{2} (h - y_c) - c, \quad D_3 = -\frac{\gamma f}{2} h,$$

$$C_2 = \gamma f \left(\frac{y_c}{3m} \left\{ (y_c - h)^3 - \left(\sqrt{R^2 - x_c^2} \right)^3 \right\} - \frac{h y_c^2}{2} + \frac{h x_A}{2} (h - y_c) \right).$$

Очевидно, минимальное значение выражения (8) равно коэффициенту устойчивости откоса. Выражение (8) является функцией, аргументом которой служат независимые параметры R , x_c , y_c .

Метод решения задачи. Функция, выражающая коэффициент устойчивости (3) или (8), имеет три независимые переменные. Поэтому, варьируя эти три выбранные переменные, можно найти те значения, которые соответствуют минимальному значению коэффициента устойчивости. Для этого область предполагаемого центра круглоцилиндрической поверхности скольжения (область на рис. 2, б) разбивается на подобласти (сетки). Для каждого узла этой сетки, варьируя значения радиуса круглоцилиндрической поверхности скольжения от значений R_a до наименьшего (равным значению расстояния от центра до откоса), вычисляется коэффициент устойчивости по выбранным методам и определяется радиус, вызывающий наименьшее значение коэффициента. Далее из всех узлов по значениям коэффициента устойчивости находим центр кругло-цилиндрической поверхности скольжения. Необходимо отметить, что, принимая достаточно большую область искомых центров, можно с точностью определить искомый центр и радиус круглоцилиндрической поверхности скольжения. Расчет можно модифицировать на последовательное определение центра кругло-цилиндрической поверхности скольжения: по найденным 10 значениям центров автоматически составляется новая область искомых центров, включающая в себя внутрь этих центров и далее повторяется нахождение следующих новых центров и радиу-

сов круглоцилиндрической поверхности скольжения. Отметим, что представленный алгоритм расчета из всех возможных центров ищет поверхность скольжения с минимальным коэффициентом устойчивости, т.е. ориентирован на круглоцилиндрической поверхности скольжения. Чтобы допустить другие очертания поверхности скольжения, данный метод считается непригодным.

Численные результаты и их анализ. Рассмотрим некоторые результаты определения поверхности скольжения с использованием разработанной методики. Был рассмотрен грунтовой откос плотины 15м с углом заложения $\alpha=30^\circ$, сложенный полутвердой глиной, со следующими физико-механическими характеристиками: плотность $\rho=1.89 \text{ г/см}^3$; удельный вес $\gamma=18.5 \text{ кН/м}^3$; удельное сцепление $C=19.82 \text{ кПа}$ (2.02 кгс/см^2); угол внутреннего трения $\phi=14^\circ$.

На рис. 2 – 5 приведены зависимости значений коэффициента устойчивости от радиуса предполагаемой поверхности обрушения. На рис. 2 нумерация 1 – 5 соответствует границам поверхности скольжения $x_{нижн}=0$, $x_{нижн}=-1\text{м}$, $x_{нижн}=-2\text{м}$, $x_{нижн}=-4\text{м}$ и $x_{нижн}=-5\text{м}$ при $x_{верх}=22.5 \text{ м}$. Как видно из рис. 2, минимальные значения коэффициента устойчивости достигают в пределах радиуса круглоцилиндрической поверхности скольжения до 22 м, далее с увеличением радиуса монотонно возрастает значение коэффициента устойчивости. Следовательно, можно сделать вывод, что граница нижней части поверхности скольжения при $x_{верх}=22.5 \text{ м}$ откоса может охватить до 1 в пределах исходных данных задачи.

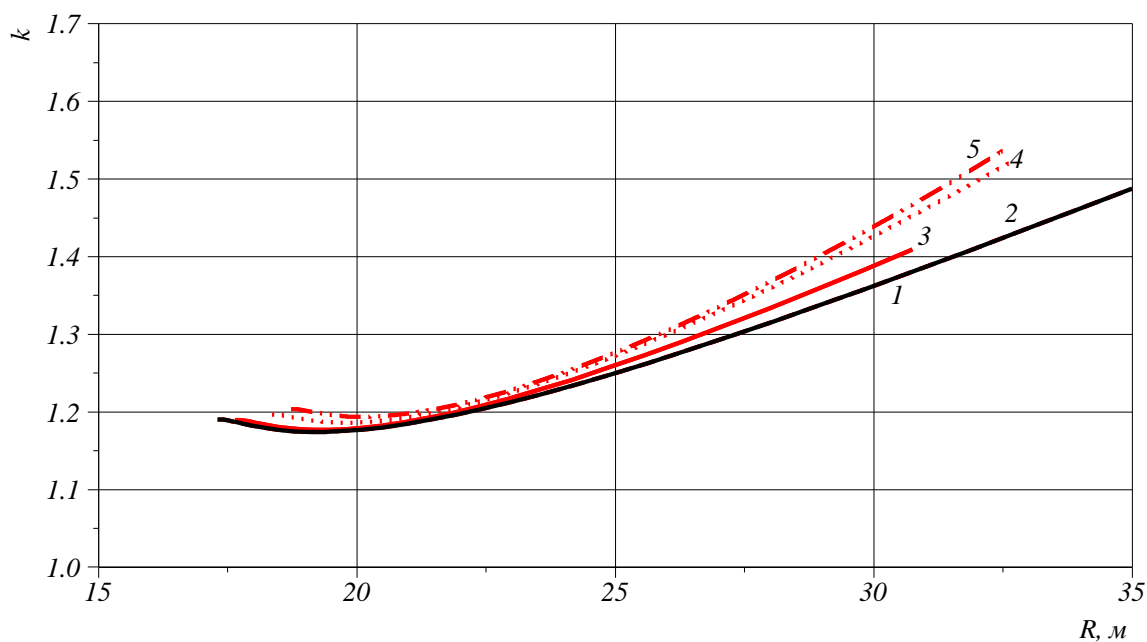


Рис. 2. Зависимость коэффициента устойчивости откоса от радиуса круглоцилиндрической поверхности скольжения при $x_{верх}=22.5 \text{ м}$

На рис. 3 кривые 1 – 5 соответствуют границам поверхности скольжения $x_{верх}=22.5\text{м}$, $x_{верх}=23.5 \text{ м}$, $x_{верх}=24.5 \text{ м}$, $x_{верх}=25.5 \text{ м}$ и $x_{верх}=26.5 \text{ м}$ при $x_{нижн}=0$. Здесь тоже наблюдается увеличение значений коэффициента устойчивости с ростом радиуса круглоцилиндрической поверхности скольжения. Отсюда также можно сделать вывод, что, во-первых, радиус круглоцилиндрической поверхности скольжения не может быть бесконечным, т.е. предполагаемая поверхность скольжения массива грунта не может быть плоской, во-вторых, верхняя граница возможного обрушения (если не имеется трещин, отколов или других особенностей) охватывает гребную часть грунтового откоса.

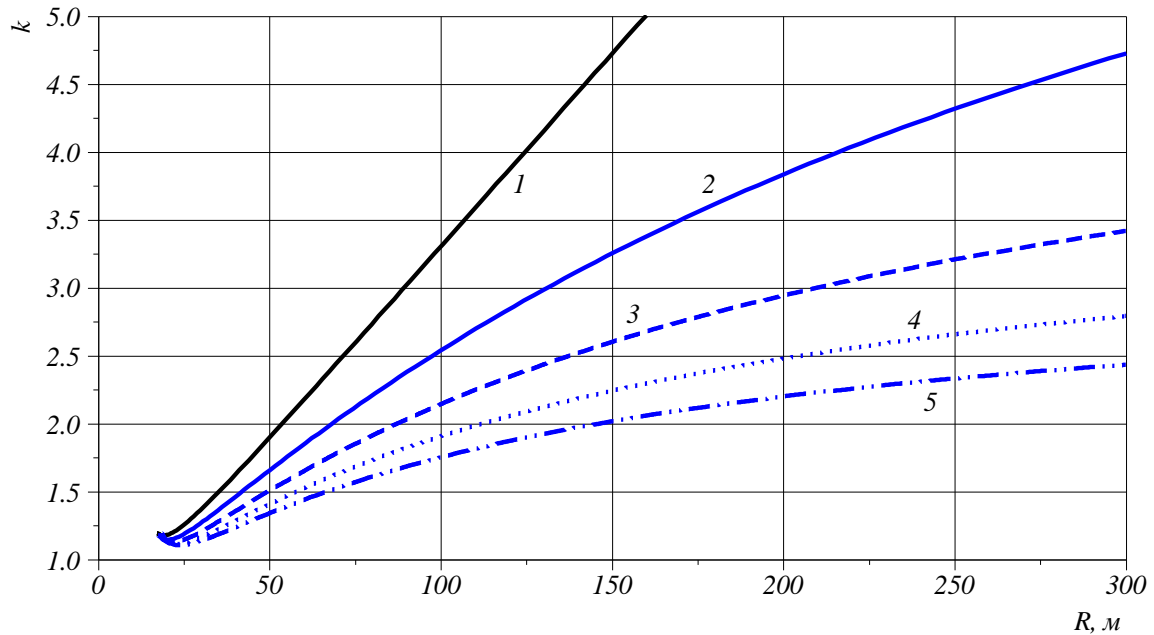


Рис. 3. Зависимость коэффициента устойчивости откоса от радиуса круглоцилиндрической поверхности скольжения при $x_{нижн}=0$

Для прогнозирования обхвата поверхности скольжения на гребной части рассмотрим результат, приведенный на рис. 4. Здесь кривые 1 – 5 соответствуют правым (верхним) границам поверхности скольжения $x_{верх}=24.5$ м, $x_{верх}=26.5$ м, $x_{верх}=30.5$ м, $x_{верх}=34.5$ м и $x_{верх}=38.5$ м при $x_{нижн}=0$. Отсюда видно, что с увеличением радиуса круглоцилиндрической поверхности скольжения (что соответствует ближе плоским поверхностям скольжения) интенсивность увеличения коэффициента угасает, т.е. поверхности, где имеются наибольшие гребневые участки, близки плоской поверхности скольжения. Наименьшее значение коэффициента устойчивости соответствует верхним границам при $x_{верх}=24.5$ м и $x_{верх}=26.5$ м, т.е. от 2 до 4 м.

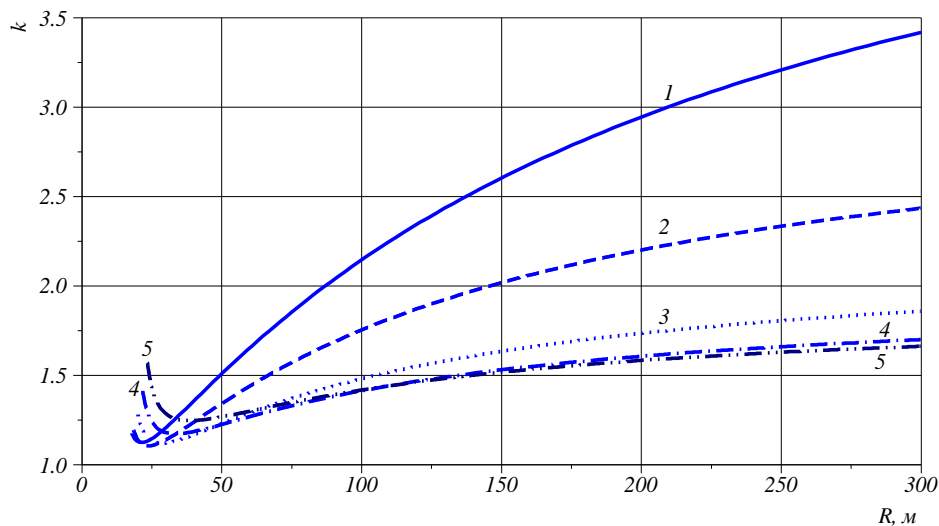


Рис. 4. Зависимость коэффициента устойчивости откоса от радиуса круглоцилиндрической поверхности скольжения при $x_{верх}=0$

На рис. 5 приведены зависимости коэффициента устойчивости грунтового откоса для различных границ круглоцилиндрической поверхности скольжения, т.е. для различных точек пересечения поверхности скольжения с профилем грунтового откоса. Кривые 1 – 3 на рис. 5 соответствуют левой точке пересечения поверхности скольжения с профилем откоса (граница круглоцилиндрической поверхности скольжения) $x_{нижн}=0$, $x_{нижн}=-1$ м,

$x_{нижн} = -2$ м, кривые без штрихов относятся к правым точкам границы $x_{верх} = 26.5$ м, а со штрихами – $x_{верх} = 25.5$ м. Как видно из рис. 5, коэффициент устойчивости принимает наименьшее значение (примерно на 1.1) при $x_{нижн} = -2$ м и $x_{верх} = 26.5$ м, т.е. поверхность скольжения пересекает 2 м у основания и обхватывает около 4 м гребня.

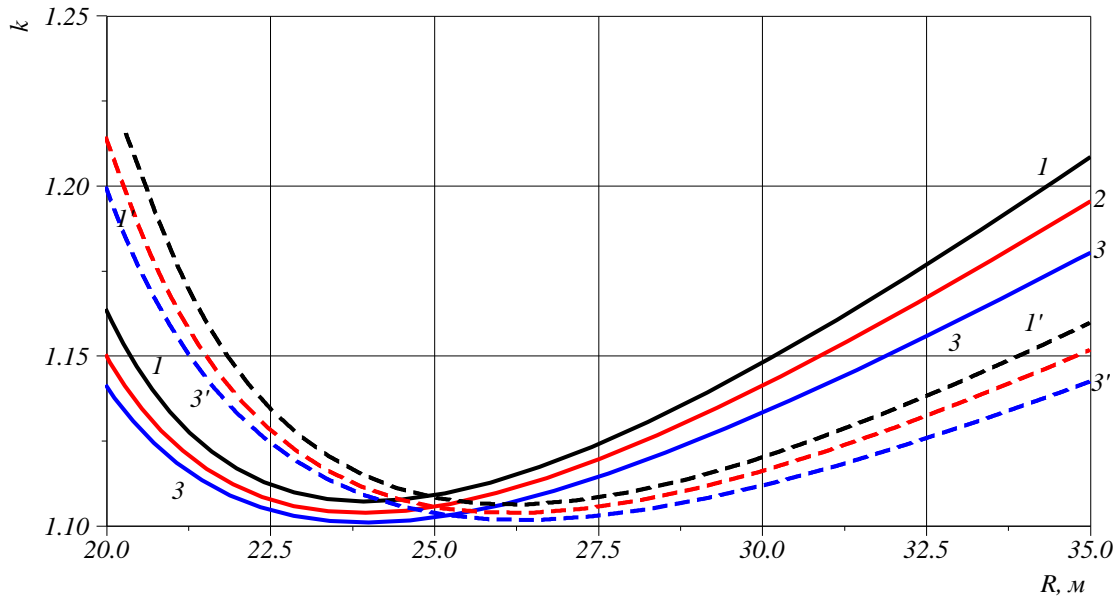


Рис. 5. Зависимость коэффициента устойчивости откоса от радиуса для различных границ круглоцилиндрической поверхности скольжения

На рис. 6 – 7 показаны диаграммы напряжений вдоль кругло-цилиндрической поверхности скольжения. Параметры круглоцилиндрической поверхности скольжения и коэффициенты устойчивости для этих поверхностей приведены в табл. 1.

Таблица 1

Коэффициент устойчивости и параметры поверхности скольжения

K	R, м	R _x , м	R _y , м	x ₁ , м	x ₂ , м
1.0995	23.4537	7.6369	22.2384	0.0683	29.9457
1.1039	24.4396	7.6369	22.2384	-2.4997	30.9800
1.1053	26.9600	7.6369	25.3488	-1.5435	32.5315
1.1101	26.0079	7.6369	25.3488	0.5587	31.4972
1.1151	21.1638	7.6369	19.1280	-1.4198	28.3941
1.1161	29.6741	7.6369	28.4592	-0.7669	34.0830
1.1171	25.4294	7.6369	22.2384	-4.6964	32.0143

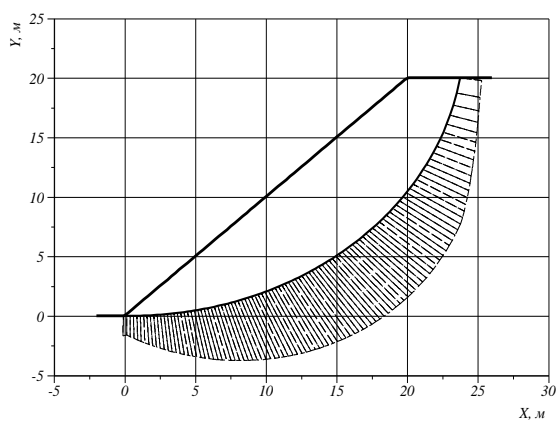


Рис.6. Предполагаемая поверхность скольжения и эпюра удерживающих напряжений вдоль поверхности

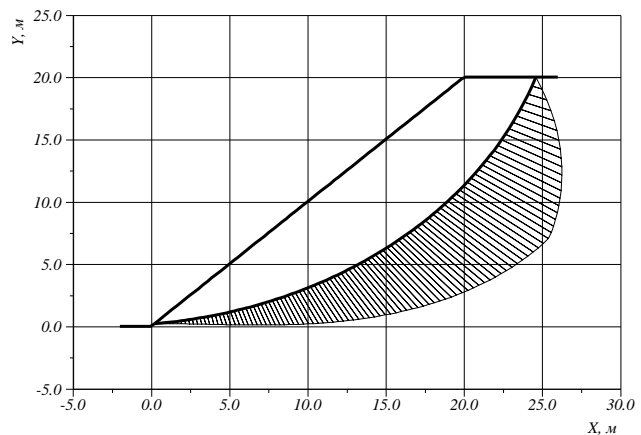


Рис.7. Предполагаемая поверхность скольжения и эпюра касательных напряжений вдоль поверхности

Результаты расчета устойчивости откоса по методам круглоцилиндрических поверхностей скольжения для разных методик представлены на рис.8 и сравнены с табл. 2. Кривые 1–3 на рис.8 соответствуют первым трем наиболее неблагоприятным поверхностям скольжения из табл. 1.

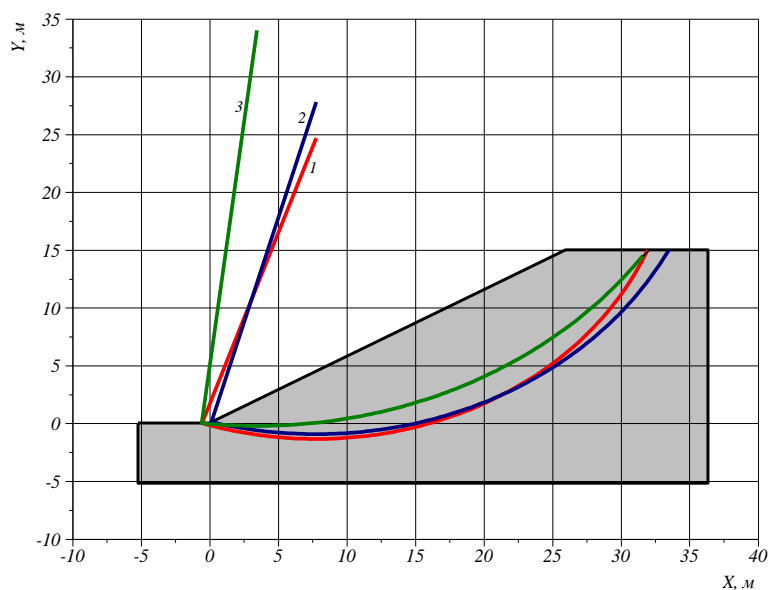


Рис.8. Центры и радиусы круглоцилиндрической поверхности скольжения по методу Терцаги

Таблица 2.

Сравнительный анализ результатов

Результаты с использованием традиционных способов [25]				
Метод расчета	$K_{уст}$	R, м	X_0 , м	Y_0 , м
Метод Г. Крея	1.1602	30.00	5.77	24.43
Метод К. Терцаги	1.1019	27.00	7.19	21.00
Метод «весового давления»	1.1836	29.00	6.48	23.29
Результаты с использованием созданного алгоритма настоящей работы				
Метод Г. Крея	1.1529	26.03	7.78	24.67
Метод К. Терцаги	1.0995	23.45	7.63	22.23
Метод «весового давления»	1.1830	26.59	7.47	25.35

Как видно из сравнений результатов расчетов по разработанной методике с традиционными способами во всех методах коэффициент устойчивости, определенный по нашей методике, ниже, чем значения, полученные традиционными способами. По методу Г. Крея (аналогично методу Шахунянца), где, в основном, используется в железнодорожном транспорте, получен коэффициент устойчивости, равный 1.1529 по сравнению с полученным в [25] 1.1602. Аналогичные выводы получены при сравнении с результатами по другим методам. Значит, можно полагать, что в традиционных способах при определении центра и радиуса возможны упущения самых неблагоприятных случаев при оценке устойчивости.

Выводы. Использование в инженерной практике большого числа расчетных методов для оценки устойчивости грунтовых массивов свидетельствует о сложности задачи и незавершенности процесса поиска ее решения, которое удовлетворяло бы исследователей и проектировщиков. Существующими методами нахождение наиболее опасной круглоцилиндрической поверхности скольжения путем выделенной области не гарантирует нахождение минимума значения коэффициента устойчивости, поскольку возможно существование в других областях нескольких локальных минимумов. Разработана методика определения центра и радиуса круглоцилиндрической поверхности скольжения. Путем сравнения результатов с другими методами показано преимущество методики и область, обеспечивающие минимум коэффициенту устойчивости, лежащий за пределами выделенной области при применении традиционными способами.

Литература

- [1] *Huang Y.H.* Slope Stability Analysis by the Limit Equilibrium Method. in American Society of Civil Engineers, 2014. P. 1–365.
- [2] *Huang C.* Limit Analysis Theory of the Soil Mass and Its Application. Singapore, 2020. – 462 P.
- [3] *Karl Terzaghi.* Theoretical Soil Mechanics. John Wiley & Sons, Inc. Printed in the USA, 2001. – 526 p.
- [4] *Султанов К.С., Хусанов Б.Э.* Определение просадки нелинейно-деформируемого грунтового массива при увлажнении // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2002. № 3. С. 2–4.
- [5] *Khan M.I., Wang S.* Slope Stability Analysis to Correlate Shear Strength with Slope Angle and Shear Stress by Considering Saturated and Unsaturated Seismic Conditions // Appl. Science. Vol.11 2021. P. 4568.
- [6] *Duncan J. M.* Slope stability then and now // Proceedings of the ASCE GeoCongress. 2013. P. 2191–2210
- [7] *Zhang Z., Chang C., Zhao Z.* Influence of the Slope Shape on Seismic Stability of a Slope // Advances in Civil Engineering, 2020. P.1–8.
- [8] *Raghuvanshi T.K.* Plane failure in rock slopes – A review on stability analysis techniques // Journal of King Saud University – Science. Vol.31. 2019. P. 101–109.
- [9] *Khusanov B., Khaydarova O.* Stress-strain state of earth dam under harmonic effect // E3S Web of Conference. Vol.97. 2019. P. 05043.
- [10] *Fellenius W.* Calculation of the stability of earth dams // Trans, of 2nd congress on Large Dams. Vol 4. 1936. P 445–459.
- [11] *Malinin A.G., Malinin P.A., Chernopazov S.A., Gladkov I.L., Vorob'ev A. V.* Computer programs for geotechnical analyses // Soil Mechanics and Foundation Engineering. Vol.45. 2008. P.13–16.
- [12] *Van Den Berge, Duncan J.M., Brandon T.L.* Rapid drawdown analysis using strength reduction // In 18th International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, Challenges and Innovations in Geotechnics, ICSMGE. 2013. P. 829–832.
- [13] *Przewłocki J.* Brief Literature Review and Classification System of Reliability Methods for Evaluating the Stability of Earth Slopes // Sustainability. Vol. 13. 2021. P. 9090.
- [14] *Sagdullaeva D.A., Maxmudova S.A., Adilov F.F., Abirov R.A., Khazratkulov I.O., Nasirov I.A.* On stability of slopes in mountain zones. Case study // Journal of Physics: Conference Series. Vol.1425. 2019. P. 012016.
- [15] *Khusanov B., Rikhsieva B.* Thickness dimensions of the contact layer of soil-rigid body interaction // E3S Web of Conference. Vol.97. 2019. P. 04040.
- [16] *Abirov R.A., Khusanov B.E., Sagdullaeva D.A.* Numerical modeling of the problem of indentation of elastic and elastic-plastic massive bodies // IOP Conference Series. Materials Science of Engineering. Vol. 971. 2020. P. 032017.
- [17] *Chanda N.* Seismic stability analysis of slope assuming log-spiral rupture surface using modified pseudo-dynamic method // International Journal of Geotechnical. Engineering. Vol. 15 2021. P. 160–170.
- [18] *Sultanov K.S., Khusanov B.E., Loginov P.V., Normatov Sh.I.* Method for Assessing the Reliability of Earth Dams in Irrigation Systems // Construction of Unique Buildings and Structures. Vol. 89. 2020. P. 8901.
- [19] *Harabinová S., Kotrasová K., Kormaníková E., Hegedüsová I.* Analysis of Slope Stability // Civil. Environ. Engineering. Vol. 17. 2021. P. 192–199.
- [20] *Nalgire T., Dahale P.P., Mehta A.A., Hiwase P.D.* Slope Stability Analysis by GeoSlope // HELIX. Vol.10. 2020. P. 71–75.
- [21] *Kristo C., Rahardjo H., Satyanaga A.* Effect of hysteresis on the stability of residual soil slope // International Soil Water Conserv. Res. 2019. Vol.7, P. 226–238.
- [22] *Фомичев А.А., Саинов М.П.* Влияние конструкции комбинированной плотины на ее напряженно-деформированное состояние // Журнал “Вестник МГСУ”. Вып. 1. 2018. Т. 13. С. 107–115.
- [23] *Michalowski R.L.* Stability of intact slopes with tensile strength cut-off // Géotechnique. Vol. 67. 2017. P 720–727.
- [24] *Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Khodzhaev D.A.* Stability evaluation of slopes of earth dams with account of soil rheological properties // Magazine of Civil Engineering. Vol. 35. 2012. P. 49–58.
- [25] *Леханова К.В., Новодзинский А.Л.* Сравнение численных и аналитических методов расчета устойчивости грунтовых откосов // Вестник ПНИПУ Строительство и геотехника. Вып. 1. 2011. С. 45–50.

Дата поступления
20.01.2022

Умархонов С.И., Норматов Ш.И., Хайдарова О.М. Доиравий цилиндрик силжиши сирти параметрларини аниқлаш ва грунтли қияликларнинг устуворлигини баҳолаш усуллари

Аннотация: Мақолада бир жинсли грунтли қияликларнинг устуворлигини баҳолаш масаласи кўрилган. Меърий қоидаларда тавсия этилган ва амалиётда кенг қўлланилатган – силжишга нисбатан энг катта қаришлик фақат силжиши сиртида эришилади деган фаразга асосан қияликлар устуворлигини ҳисоблаш усуллари таҳлил қилинган. Устуворликнинг минимал қийматини берадиган доиравий-цилиндрик силжиши сиртининг параметрларини аниқлаш усули ишлаб чиқилган. Грунтли қияликлар устуворлигини баҳолашдаги муҳандислик ёндашувнинг турли усулларида олинган натижалар таққосланган

Калит сўзлар: грунт; қиялик; қияликлар устуворлиги; силжиши сирти; устуворлик коэффициентини.

Umarkhanov S.I., Normatov Sh.I., Khaydarova O.M. Methods for determining the parameters of a circular-cylindrical sliding surface and assessing the stability of soil slopes

Abstract: *The study is devoted to assessing the stability of homogeneous soil slopes. The existing methods for calculating stability are analyzed, based on the assumption that the ultimate shear resistance is achieved only on the sliding surface; they are recommended in regulatory documents and are widely used in practice. A method for determining the parameters of a circular-cylindrical sliding surface corresponding to the minimum value of the stability coefficient was developed. The stability of soil slopes is estimated and the results are compared with the results obtained by various calculation methods of the engineering approach. The advantages of the method and the existing areas, which provide a minimum of the stability coefficient lying outside the selected area when applied by traditional method are shown.*

Keywords: *soil; slope; slopes stability; sliding surface; stability coefficient.*

УДК 531:621-752:681

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С ЖИДКОСТНЫМ ГАСИТЕЛЕМ

Ходжабеков М.У.

*Самаркандский государственный архитектурно-строительный институт. Самарканд, Узбекистан
E-mail: uzedu@inbox.ru*

Аннотация: *В статье рассмотрена задача о нелинейных поперечных колебаниях упругого стержня с жидкостным гасителем. Методика математического моделирования рассматриваемой виброзащитной системы основана на применении метода графов связей. Для изучения динамики данной системы получена передаточная функция виброзащищаемого стержня. Оценена эффективность динамического гасителя при различных значениях конструкционных параметров системы.*

Ключевые слова: *упругий стержень; динамический гаситель; граф связи; гистерезис; жидкостное звено; кинематические воздействия.*

Введение. Во всех сферах промышленности и техники особое внимание уделяется эффективному использованию деталей машин и механизмов за счет устранения вредных вибраций, вызванных движением их частей, выявлению факторов, препятствующих длительной безупречной работе, и принятию мер по их устранению. В связи с этим одной из актуальных задач являются научное обоснование существующей проблемы, связанной с движением механических систем, проведение математического моделирования, изучение динамики, выбор оптимальных параметров и разработка соответствующих рекомендаций. При решении таких задач эффект от использования динамических гасителей с жидкостным звеном для гашения вредных колебаний низкочастотных систем ожидается довольно высоким.

Важную роль в поиске правильного решения проблемы с учетом свойств упругой диссипации играет правильный подход к рассеянию внутренней энергии в задаче снижения вредных колебаний различных типов механических систем.

Во многих научных работах изучены колебания системы под действием различных внешних факторов, представленные методами линеаризации нелинейных функций упруго-диссипативных свойств в системах в комплексном виде.

В [1] выполнено математическое моделирование упругодиссипативных характеристик систем гистерезисного типа. В формуле, представляющей гистерезисную петлю, геометрическое положение каждого параметра, участвующего в этой петле, показано графически. Анализируется изменение петли при изменении параметров.

В [2] для повышения сейсмостойкости зданий введены дополнительные жесткости и демпфирование в виде пластины с упругодиссипативными характеристиками гистерезисного типа в уровне перекрытия каждого этажа. Аналитически проанализировано увеличение демпфирующего эффекта здания при различных значениях параметров пластины.

В [3] представлены общие уравнения движения, нелинейно консервативные, нелинейно диссипативные силы и математическое выражение упругодиссипативной характеристики гистерезисного типа и применение метода усреднения для систем с упругодиссипативной характеристикой гистерезисного типа.

В [4] рассматривается упругодиссипативная характеристика системы гистерезисного типа в параметрической форме. Параметрические изменения характеристики анализировались численно, т.е. было показано, что каждое изменение параметра вызывает изменения в определенной части гистерезисной петли.

В [5] изучено использование и конструирование динамического гасителя консольного типа для гашения колебаний микромеханизмов. На этой основе выполнено математическое моделирование системы с шестью степенями свободы и проанализированы решения дифференциального уравнения движения, когда внешняя сила является гармонической.

В [6] показан способ получения уравнений нормальной формы методом усреднения и выражения детерминантной формы характеристического уравнения в виде определителя Якоби.

В [7] исследуется влияние динамического гасителя с упругодиссипативной характеристикой гистерезисного типа на неустойчивое движение. Решена задача радикального уменьшения амплитуд, вызванных неустойчивым движением.

В [8, 9] изучались динамические гасители с жидкостным звеном; показана высокая эффективность их в гашении вибраций в низкочастотных механических системах в отличие от традиционных динамических гасителей.

Метод граф связей позволяет математически моделировать рассматриваемые механические системы, независимо от сложности процессов с помощью единого структурного подхода [10–16].

В [17–20] показано математическое моделирование и исследованы колебания стержня с упругодиссипативными характеристиками гистерезисного типа при кинематических воздействиях; выявлены условия минимума передаточной функции.

Кроме того, в работах [21–23] изложены подходы к частотам и формам собственных колебаний различных систем с упругодиссипативными характеристиками, амплитудно-частотные характеристики, указана необходимость защиты их от вредных колебаний.

Результаты анализа указывают на достаточно большое число исследований по математическому моделированию сложных систем, разработке методов их расчета и изучению их динамики.

Результаты проведенного анализа свидетельствуют о том, что существует необходимость проведения масштабных исследований по математическому моделированию и численному анализу поперечных колебаний стержня с упругодиссипативными характеристиками гистерезисного типа, защищенного от вибраций, с учетом эффектов кинематических движений и изменения параметров.

Материалы и методы. Рассмотрим нелинейные поперечные колебания стержня с упругодиссипативной характеристикой гистерезисного типа и динамическим гасителем колебаний с жидкостным звеном при кинематических воздействиях (рис. 1). Упругодиссипативная характеристика гистерезисного типа материала стержня получена согласно гипотезе Писаренко–Богинича [24].

Воспользуемся методом графов связей для математического моделирования рассматриваемой виброзащитной системы. Для этого выразим параметры системы методом графов связей.

Примем (см. рис. 1), что m_1^* – инертность (масса) внешнего корпуса динамического гасителя, окружающего жидкость; m_2^* – инертность (масса) твердого тела динамического гасителя; m_3^* – инертность (масса) жидкости; m_4^* – инертность жидкости (масса), прикрепленной к телу 2 с массой m_2^* ; b_F – коэффициент сопротивления демпфера (коэффициент

вязкости); c_{1*}^{-1} и c_{2*}^{-1} – коэффициенты податливости (коэффициенты упругости); q_{3*} , q_{4*} – перемещение; $F_L(t)$ и $F_R(t)$ – внешние силы. Примем, что гидродинамическое воздействие жидкости на твердое тело 2 равно F_S .

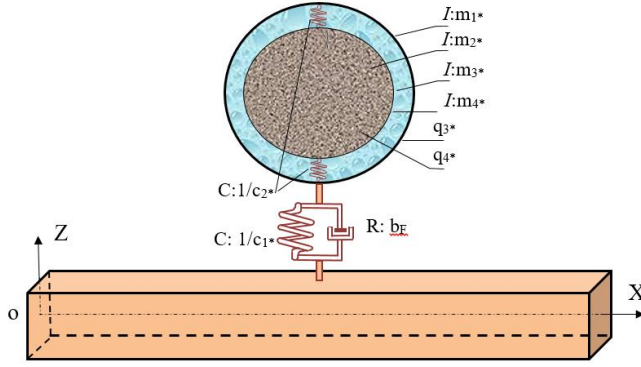


Рис.1. Схема физической модели динамического гасителя с жидкостным звеном на упругом стержне

оболочка, окружающая жидкость, имеют одинаковую абсолютную скорость, I звено имеет свойства $I: m_{3*} \leftarrow 1 \rightarrow I: m_{1*} \Rightarrow I: m_{1*} + m_{3*}$ (вводим обозначение $m_{1*} + m_{3*} + m_{13*}$).

Согласно закону Архимеда, на тело действует сила, равная $m_v g$ жидкости, вытесненной твердым телом 2, и ускорение свободного падения), и эта сила уравновешивается силой тяжести, силой упругости пружины внутри жидкости, а также силами инерции. Если обозначим силы инерции F_1 и F_2 , создаваемые воздействием внешней оболочки, окружающей жидкость и внутренним твердым телом, окруженным жидкостью, под действием силы Архимеда, то эти силы рассматриваются как внешний источник, прикрепленный к узлу I . В этом случае граф связи структурно выглядит следующим образом.

На рис. 2 F_F – сила, представляющая взаимодействие динамического гасителя с жидкостным звеном и стержнем; \dot{q}_i – скорость; m_i и c_i – модальная масса и жесткости, которые выражаются следующим образом ($i=1 \dots n$):

$$m_i = \int_0^L \rho A u_i^2 dx; c_i = \left[\int_0^L \rho A (1 + C_0 (-\eta_1 + j\eta_2)) u_i^2 dx + \frac{3EI}{\omega_{*i}^2} (-\eta_1 + j\eta_2) \times \right. \\ \left. \times \sum_{i^*=1}^n C_i q_{ia}^{i^*} \frac{h^{i^*}}{2^{i^*} (i^* + 3)} \int_0^L u_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right|^{i^*} \right) dx \right] \omega_{*i}^2,$$

где A и ρ – площадь поперечного сечения и плотность стержня; C_0, C_1, \dots, C_n – экспериментально определяемые коэффициенты петли гистерезиса, зависящие от демпфирующих свойств материала стержня [23]; E – модуль Юнга; I – момент инерции; $q_{1a}, q_{2a}, \dots, q_{na}$ – амплитудные значения форм колебаний стержня; h и ω_{*i} – толщина и собственные частоты стержня; u_i – собственные формы колебаний стержня; η_1, η_2 – коэффициенты гармонической линеаризации, $\eta_2 = \eta_{22} \text{sign}(\omega)$; $\text{sign}(\omega)$ – знак ω ; η_{22} – постоянный коэффициент [24,25]; L – длина стержня; $j^2 = -1$.

На рис. 2 обозначен граф связи под действием сил $F_L(t)$ и $F_R(t)$, приложенных в левом и правом концах стержня, и динамического гасителя колебаний. Через 0 и 1 обозначим действия источников элементов графов связей системы. Учитывая определение энергетических переменных p_i и q_i из инерции и податливости элементов, и определяя их как источники интегрального воздействия, элементы податливости придают силы системе, а другие графы связей, которые прикреплены к связям 0, дают скорость в системе. Поскольку элементы инерций придают системе скорость, эти инерционные элементы представляют собой воздействие сил только на эту систему, как и другие графы связи 1, к которым прикреплена

При математическом моделировании рассматриваемой системы используется метод графов связей. Имея в виду, что метод графов связей основан на обмене мощностями между элементами механических систем, можно определить элементы, имеющие общие скорости ($f_i=f, i=1 \dots n$) и силы ($e_i=e, i=1 \dots n$) в системе, креплением их с помощью структурных связей I и O соответственно.

Поскольку жидкость и внешняя

точка стержня, к которой крепится динамический гаситель с жидкостным звеном. В результате описываем граф связи простым способом, учитывая свойства графов. Отсюда можно составить дифференциальное уравнение движения для произвольной i - й моды стержня. Для удобства выделим графы связей, подключенные к i - й моде стержня, и пронумеруем их соответственно, как показано на рис. 3.

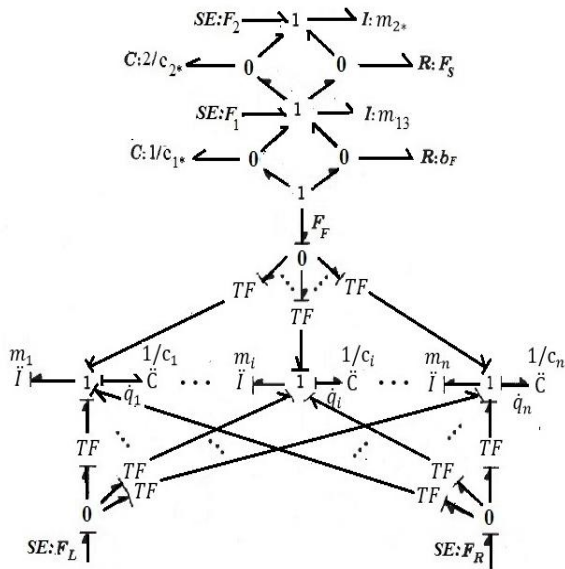


Рис. 2. Граф связи виброзащищаемого стержня

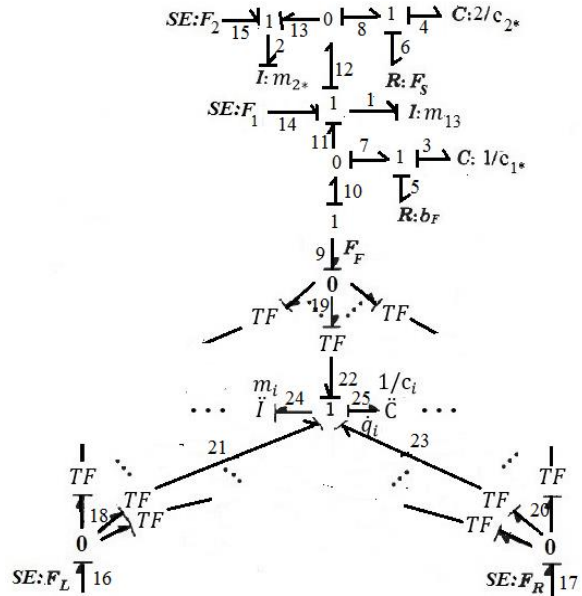


Рис. 3. Граф связи виброзащищаемого стержня i - ой моды

В этом случае сила, представляющая взаимодействие динамического гасителя с жидкостным звеном и стержнем, будет выглядеть следующим образом:

$$F_F = e_9 = e_{10} = e_7 = e_3 + e_5 = c_{1*}q_3 + b_F \left(-\frac{\partial w_i(x_1, t)}{\partial t} - m_{13*}^{-1}p_{1*} \right), \quad (1)$$

где $\partial w_i(x_1, t)/\partial t$ – производные первого порядка по времени при значениях формы колебаний в точках стержня $x=x_1$ (x_1 – точка установления динамического гасителя), представляющие собой скорость точки стержня, в котором установлен динамический гаситель с жидкостным звеном.

Результаты и их анализ. Из свойств узлов 0 и 1, из выражений скоростей и сил пронумерованных графов, соответственно, из выражений влияния элементов на систему и элементов инерции и податливости системы можем записать следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= u_i(x_1)(c_{1*}q_{3*} + b_F \left(-\frac{\partial w_i(x_1, t)}{\partial t} - m_{13*}^{-1}p_{1*} \right)) + u_i(0)F_L + u_i(L)F_R - c_iq_i, \\ \dot{p}_{1*} &= c_{1*}q_{3*} + b_F \left(-\frac{\partial w_i(x_1, t)}{\partial t} - m_{13*}^{-1}p_{1*} \right) - 2c_{2*}q_{4*} + F_S - F_1, \end{aligned} \quad (2)$$

$\dot{p}_{2*} = 2c_{2*}q_{4*} - F_S + F_2$; $\dot{q}_i = m_i^{-1}p_i$, $\dot{q}_{3*} = -\frac{\partial w_i(x_1, t)}{\partial t} - m_{13*}^{-1}p_{1*}$, $\dot{q}_{4*} = m_{13*}^{-1}p_{1*} - m_{2*}^{-1}p_{2*}$, где $u_i(0)$, $u_i(L)$ и $u_i(x_1)$ – значения форм свободных колебаний стержня в точках $x=0$, $x=L$ и $x=x_1$, считающего модулем трансформации.

Полученная система дифференциальных уравнений первого порядка представляет собой математическую модель совместных нелинейных колебательных движений стержня с упругодиссипативной характеристикой гистерезисного типа и динамическим гасителем с жидкостным звеном.

Принимаем гидродинамическую силу в системе дифференциальных уравнений (2) с учетом силы инерции жидкости, прикрепленной к телу массы m_{2*} и вязкости жидкости с коэффициентом b_S [8]:

$$F_S = -(m_{4*}\ddot{q}_{4*} + b_S\dot{q}_{4*}). \quad (3)$$

Представим инерционные силы $F_1 = m_v \ddot{q}_{2*}$ и $F_2 = m_v \ddot{q}_{1*}$ следующим образом:

$$F_1 = m_v \ddot{q}_{2*} = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_{2*} = \ddot{q}_{13*} = \ddot{q}_{12*} - \ddot{q}_{8*} = \ddot{q}_{11*} - \ddot{q}_{4*} \\ = \ddot{q}_{10*} - \ddot{q}_{7*} - \ddot{q}_{4*} = \ddot{q}_{9*} - \ddot{q}_{3*} - \ddot{q}_{4*} \end{array} \right\} = m_v (\ddot{q}_{9*} - \ddot{q}_{4*} - \ddot{q}_{3*}), \quad (4)$$

$$F_2 = m_v \ddot{q}_{1*} = \{ \ddot{q}_{1*} = \ddot{q}_{11*} = \ddot{q}_{10*} - \ddot{q}_{7*} = \ddot{q}_{9*} - \ddot{q}_{3*} \} = m_v (\ddot{q}_{9*} - \ddot{q}_{3*}).$$

Если поместим выражения (3) и (4) в систему дифференциальных уравнений (2), то после выполнения некоторых упрощений [17] получим

$$A_* \ddot{Q} + B \dot{Q} + CQ = F, \quad (5)$$

где

$$\ddot{Q} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_i \\ \ddot{q}_{3*} \\ \ddot{q}_{4*} \end{bmatrix}, \dot{Q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{q}_{3*} \\ \dot{q}_{4*} \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} q_i \\ q_{3*} \\ q_{4*} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} u_i(0)F_L + u_i(L)F_R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_* = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ (m_{13*} + m_{2*})u_i(x_1) & m_{13*} + m_{2*} & m_{2*} + m_v \\ (m_{2*} - m_v)u_i(x_1) & m_{2*} - m_v & m_{2*} + m_{4*} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -u_i(x_1)b_F & 0 \\ 0 & b_F & 0 \\ 0 & 0 & b_S \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_i & -u_i(x_1)c_{1*} & 0 \\ 0 & c_{1*} & 0 \\ 0 & 0 & 2c_{2*} \end{bmatrix}.$$

Используя систему дифференциальных уравнений, определенную (5), находим передаточные функции для исследования динамики виброзащитной системы с помощью амплитудно-частотной характеристики. Для этого приведем систему дифференциальных уравнений (5) к системе алгебраических уравнений с помощью дифференциального оператора $S = \frac{d}{dt}$:

$$\begin{aligned} (m_i S^2 + c_i)q_i - u_i(x_1)(b_F S + c_{1*})q_{3*} &= u_i(0)F_L + u_i(L)F_R, \\ M_1 u_i(x_1)S^2 q_i + (M_1 S^2 + b_F S + c_{1*})q_{3*} + M_2 S^2 q_{4*} &= 0, \\ M_3 u_i(x_1)S^2 q_i + M_3 S^2 q_{3*} + (M_4 S^2 + b_S S + 2c_{2*})q_{4*} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $M_1 = m_{13*} + m_{2*}$; $M_2 = m_{2*} + m_v$; $M_3 = m_{2*} - m_v$; $M_4 = m_{2*} + m_{4*}$.

Если решить эту систему уравнений на основе правила Крамера относительно переменных q_i, q_{3*}, q_{4*} , то получим:

$$\begin{aligned} q_i(S) &= \frac{a_3(b_2 d_3 - b_3 d_2)}{a_1(b_2 d_3 - b_3 d_2) + a_2(b_3 d_1 - b_1 d_3)}, \\ q_{3*}(S) &= \frac{a_3(b_3 d_1 - b_1 d_3)}{a_1(b_2 d_3 - b_3 d_2) + a_2(b_3 d_1 - b_1 d_3)}, \\ q_{4*}(S) &= \frac{a_3(b_1 d_2 - b_2 d_1)}{a_1(b_2 d_3 - b_3 d_2) + a_2(b_3 d_1 - b_1 d_3)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $a_1 = m_i S^2 + c_i$; $a_2 = -u_i(x_1)(b_F S + c_{1*})$; $a_3 = u_i(0)F_L + u_i(L)F_R$; $b_1 = M_1 u_i(x_1)S^2$; $b_2 = M_1 S^2 + b_F S + c_{1*}$; $b_3 = M_2 S^2$; $d_1 = M_3 u_i(x_1)S^2$; $d_2 = M_3 S^2$; $d_3 = M_4 S^2 + b_S S + 2c_{2*}$.

Чтобы найти выражение для передаточной функции, определим абсолютное ускорение рассматриваемой системы.

Пусть внешние силы $F_L(t)$ и $F_R(t)$, действующие на левый и правый концы лежащего на основании стержня, придают системе ускорение W_0 .

Тогда

$$F_L = F_R = -m_i W_0. \quad (8)$$

Абсолютное ускорение виброзащищаемого стержня

$$W_a = W_0 + \ddot{w}_i. \quad (9)$$

Подставим выражение сил (8) в систему уравнений (7) и в результате, используя выражение абсолютного ускорения (9), получим отношение выражения ускорения к выражению основного ускорения:

$$W_i(S, x) = 1 + \frac{u_i(x)S^2 q_i(S)}{W_0}. \quad (10)$$

Полученное выражение (10) называется передаточной функцией виброзащитной системы.

Подставим первое уравнение системы уравнений (10) в передаточную функцию (7)

$$W_i(j\omega, q_{ia}, x) = \frac{E_0 + jE_1}{N_0 + jN_1}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} E_0 &= \mu_{10} - \mu_{21}\omega - \mu_{12}\omega^2 + \mu_{23}\omega^3 + \mu_{14}\omega^4 - \mu_6\omega^6; \\ E_1 &= \mu_{20} + \mu_{11}\omega - \mu_{22}\omega^2 - \mu_{13}\omega^3 + \mu_{24}\omega^4 + \mu_5\omega^5; \\ N_0 &= \mu_{10} - \mu_{21}\omega - \alpha_{12}\omega^2 + \mu_{23}\omega^3 + \alpha_{14}\omega^4 - \alpha_6\omega^6; \\ N_1 &= \mu_{20} + \mu_{11}\omega - \mu_{22}\omega^2 - \alpha_{13}\omega^3 + \mu_{24}\omega^4 + \alpha_5\omega^5; \\ \mu_5 &= u_i^2(x_1)b_F\Delta + (1 - u_i(x)(u_i(0) + u_i(L)))m_i(M_4b_F + b_S M_1); \\ \mu_6 &= \Delta m_i(1 - u_i(x)(u_i(0) + u_i(L))); \mu_{10} = 2c_{1*}c_{2*}c_{1i}; \mu_{11} = (2b_Fc_{2*} + b_Sc_{1*})c_{1i}; \\ \mu_{12} &= (c_{1*}M_4 + b_Fb_S + 2c_{2*}M_1)c_{1i} + 2c_{1*}c_{2*}(m_i + u_i^2(x_1)M_1) - u_i(x)m_i(u_i(0) + u_i(L)); \\ \mu_{13} &= (b_F M_4 + b_S M_1)c_{1i} + (m_i + u_i^2(x_1)M_1 - u_i(x)m_i(u_i(0) + u_i(L)))(c_{1*}b_S + 2c_{2*}b_F); \\ \mu_{14} &= \Delta c_{1i} + M_1 u_i^2(x_1)b_F b_S + u_i^2(x_1)\Delta c_{1*} + (1 - u_i(x) \times \\ &\quad \times (u_i(0) + u_i(L)))m_i(M_4 c_{1*} + b_F b_S + 2c_{2*}M_1); \\ \mu_{20} &= 2c_{1*}c_{2*}c_{2i}; \mu_{21} = (2b_Fc_{2*} + b_Sc_{1*})c_{2i}; \mu_{22} = (c_{1*}M_4 + b_Fb_S + 2c_{2*}M_1)c_{2i}; \\ \mu_{23} &= (b_F M_4 + b_S M_1)c_{2i}; \mu_{24} = \Delta c_{2i}; \\ \alpha_5 &= m_i(b_F M_4 + b_S M_1) + u_i^2(x_1)b_F \Delta; \alpha_6 = m_i \Delta; \\ \alpha_{12} &= (c_{1*}M_4 + b_Fb_S + 2c_{2*}M_1)c_{1i} + 2c_{2*}c_{1*}(m_i + u_i^2(x_1)M_1); \\ \alpha_{13} &= (b_F M_4 + b_S M_1)c_{1i} + (2b_Fc_{2*} + b_Sc_{1*})(m_i + u_i^2(x_1)M_1); \\ \alpha_{14} &= \Delta c_{1i} + m_i(M_4 c_{1*} + b_F b_S + 2c_{2*}M_1) + u_i^2(x_1)(c_{1*}\Delta + b_F b_S M_1). \\ c_{1i} &= \left[\int_0^L \rho A (1 - C_0 \eta_1) u_i^2 dx - \frac{3EI}{\omega_{*i}^2} \eta_1 \times \right. \\ &\quad \times \left. \sum_{i^*=1}^n C_{i^*} q_{ia}^{i^*} \frac{h^{i^*}}{2^{i^*}(i^* + 3)} \int_0^L u_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right|^{i^*} \right) dx \right] \omega_{*i}^2; \\ c_{2i} &= \left[\int_0^L \rho A C_0 \eta_2 u_i^2 dx + \frac{3EI}{\omega_{*i}^2} \eta_2 \times \right. \\ &\quad \times \left. \sum_{i^*=1}^n C_{i^*} q_{ia}^{i^*} \frac{h^{i^*}}{2^{i^*}(i^* + 3)} \int_0^L u_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right|^{i^*} \right) dx \right] \omega_{*i}^2; \Delta = M_1 M_4 - M_2 M_3. \end{aligned}$$

Проверим на минимум эту функцию. Абсолютное значение передаточной функции (11) зависит от переменных ω и q_{ia} . В этом случае из выражения (11)

$$|W_i(j\omega, q_{ia}, x)| = \sqrt{\frac{E_0^2 + E_1^2}{N_0^2 + N_1^2}}. \quad (12)$$

Стационарные значения переменных q_{ia} и ω определяются из следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial |W_i(j\omega, q_{ia}, x)|}{\partial q_{ia}} = 0; \quad \frac{\partial |W_i(j\omega, q_{ia}, x)|}{\partial \omega} = 0. \quad (13)$$

Основываясь на приведенных выше результатах и теореме о минимизации функции двух переменных, можно описать абсолютное значение передаточной функции виброзащищаемого стержня следующим образом:

если переменные q_{ia} и ω (13) удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial^2 |W_i(j\omega, q_{ia}, x)|}{\partial q_{ia}^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 |W_i(j\omega, q_{ia}, x)|}{\partial \omega^2} > 0, \quad (14)$$

наряду с неравенством

$$\frac{\partial^2 |W_i(j\omega, q_{ia}, x)|}{\partial q_{ia}^2} \frac{\partial^2 |W_i(j\omega, q_{ia}, x)|}{\partial \omega^2} - \left(\frac{\partial^2 |W_i(j\omega, q_{ia}, x)|}{\partial q_{ia} \partial \omega} \right)^2 > 0, \quad (15)$$

то абсолютное значение передаточной функции $|W_i(j\omega, q_{ia}, x)|$ достигает минимума при этих значениях переменных.

С целью проведения численных расчетов примем материал стержня из алюминиевого сплава АЛ19 ($E=6964119 \cdot 10^4$ Н/м², $\rho=2780$ кг/м³).

Высота стержня $z=h=5 \cdot 10^{-4}$ м, длина $L=120 \cdot 10^{-2}$ м и площадь поперечного сечения $A=10 \cdot 10^{-6}$ м². Тогда $I=Ah^2/12=25 \cdot 10^{-14}$ м⁴.

В исследовании [9] приведены рекомендации по выбору параметров динамического гасителя с жидкостным звеном. Имеем: $b_s=102.9 \cdot 10^3$ Н·с/м, $m_4^*=4.1 \cdot 10^{-3}$ кг; $m_v=4.1 \cdot 10^{-6}$ кг; $m_2^*=4.5 \cdot 10^{-6}$ кг; $m_1^*=1.3 \cdot 10^{-3}$ кг; $m_3^*=2.7 \cdot 10^{-3}$ кг.

Для определения коэффициентов, связанных с диссипативными свойствами, связи между напряжениями и деформациями в рассматриваемом материале стержня из алюминиевого сплава АЛ19, используем численные значения, приведенные в справочниках и с применением метода, описанного в [26]:

$$\delta = \chi_1 q_{ia} + \dots + \chi_n q_{ia}^n. \quad (16)$$

Определяем первые три члена коэффициента логарифмического декремента:

$$\chi_1 = 10.6662475; \quad \chi_2 = -55.22539871 \cdot 10^2; \quad \chi_3 = 10.43466067 \cdot 10^5.$$

Определенное выражение логарифмического декремента (16) позволяет установить постоянные коэффициенты затухания. Запишем коэффициент поглощения следующим образом [26]:

$$\psi = C_0 + C_1 \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right| q_{ia} z + \dots + C_n \left(\left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right| q_{ia} z \right)^n. \quad (17)$$

Получаем собственную форму колебаний виброзащищаемого стержня с заземлением на двух концах:

$$u_i(x) = \frac{1}{2} \left[(\cosh(k_i x) - \cos(k_i x)) - \frac{\sinh\left(\frac{k_i L}{2}\right) + \sin\left(\frac{k_i L}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{k_i L}{2}\right) - \cos\left(\frac{k_i L}{2}\right)} (\sinh(k_i x) - \sin(k_i x)) \right]. \quad (18)$$

Запишем собственную форму колебаний k_i для первых трех значений, отличных от нуля [19].

$$u_1(x) = 0.5 [(\cosh(4.2347452x) - \cos(4.2347452x))] - 0.4765271272 [(\sinh(4.2347452x) - \sin(4.2347452x))], \quad (19)$$

$$u_2(x) = 0.5 [(\cosh(9.817385x) - \cos(9.817385x))] - 0.5014966195 [(\sinh(9.817385x) - \sin(9.817385x))], \quad (20)$$

$$u_3(x) = 0.5 [(\cosh(15.602495x) - \cos(15.602495x))] - 0.499919644 [(\sinh(15.602495x) - \sin(15.602495x))]. \quad (21)$$

Построим графики этих функций.

Из графиков на рис. 4 можно изучить характеристики первой, второй и третьей форм собственных колебаний. В этом случае собственные формы колебаний $u_1(x)$, $u_2(x)$ и $u_3(x)$ достигают наибольшего значения в середине стержня. Это указывает на то, что в этот мо-

мент прогиб будет большим и рекомендуется установить в этой точке динамический гаситель. Кроме того, собственная форма колебаний $u_1(x)$ возрастает по отношению к переменной $x \in [0; 0.6]$, в то время как собственная форма колебаний $u_2(x)$ увеличивается в интервале $x \in [0; 0.225]$ и уменьшается в интервале $x \in [0.225; 0.6]$. Собственная форма колебаний $u_3(x)$ имеет два приращения и один интервал уменьшения, т.е. увеличивается в интервалах $x \in [0; 0.15] \cup x \in [0.35; 0.6]$ и уменьшается в интервале $x \in [0.15; 0.35]$. Выявленные интервалы увеличения и уменьшения собственных форм колебаний позволяют анализировать индивидуальные перемещения каждой из точек при поперечных колебаниях стержня.

Известно, что существует следующая зависимость между коэффициентом поглощения и декрементом колебаний [26]:

$$\psi = 2\delta. \quad (22)$$

Соответственно определяем коэффициенты выражения (17). Коэффициенты значений производных второго порядка, полученных из первой формы собственных колебаний в точке, на которой установлен динамический гаситель, принимаем следующим образом:

$$C_0=0, C_1=48.12119136 \cdot 10^2, C_2=(-56,20284398 \cdot 10^7), C_3=23.95479624 \cdot 10^{12}. \quad (23)$$

Коэффициенты η_1 и η_{22} [26]:

$$\eta_1 = \frac{3}{4}; \eta_{22} = \frac{1}{\pi}. \quad (24)$$

В результате выражения c_{1i} и c_{2i} будут иметь следующий вид:

$$c_{11} = \rho A \omega_{*1}^2 \int_0^{0.6} u_1^2 dx - 3EI\eta_1(G_1 + G_2 + G_3); c_{21} = 3EI\eta_{22}(G_1 + G_2 + G_3), \quad (25)$$

где

$$G_1 = C_1 \frac{h}{8} q_{1a} \int_0^{0.6} u_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \left| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right| \right) dx; G_2 = C_2 \frac{h^2}{20} q_{1a}^2 \int_0^{0.6} u_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \left| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right|^2 \right) dx;$$

$$G_3 = C_3 \frac{h^3}{48} q_{1a}^3 \int_0^{0.6} u_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \left| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right|^3 \right) dx.$$

Если вычислим интегралы G_1, G_2, G_3 , они будут следующими:

$$G_1 = 230.3833425 q_{1a}; G_2 = -69232.74335 q_{1a}^2; G_3 = 8019069.423 q_{1a}^3.$$

В этом случае из выражения (25):

$$c_{11} = 1.031053156 - 9.024845694 q_{1a} + 2712.06598 q_{1a}^2 - 314132.3646 q_{1a}^3;$$

$$c_{21} = 3.830263476 q_{1a} - 1151.036552 q_{1a}^2 + 133321.9163 q_{1a}^3.$$

Из рис. 5 видно, что функция c_{11} убывает с изменением амплитуды, а функция c_{21} , наоборот, возрастает. Учитывая, что функция c_{1i} представляет собой вертикальное отклонение амплитудно-частотной характеристики, а функция c_{2i} представляет собой диссипацию энергии в материале стержня [26], можно сделать вывод, что по мере увеличения амплитуды вертикальное отклонение амплитудно-частотной характеристики системы уменьшается, а рассеяние энергии увеличивается.

На основании найденных значений строим график передаточной функции (12). График на рис. 6 показывает изменение передаточной функции околорезонансной частоты в зависимости от амплитуды колебаний. Видно, что передаточная функция колебаний

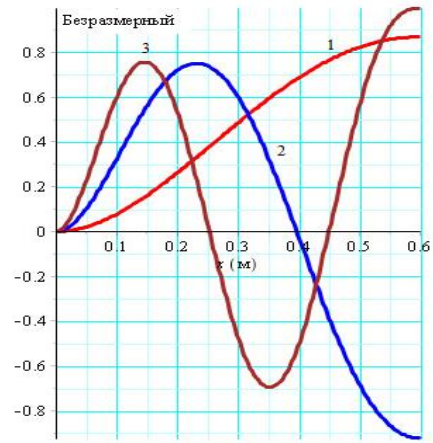
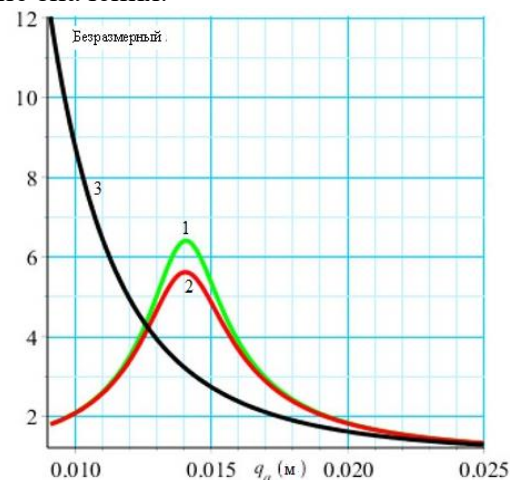
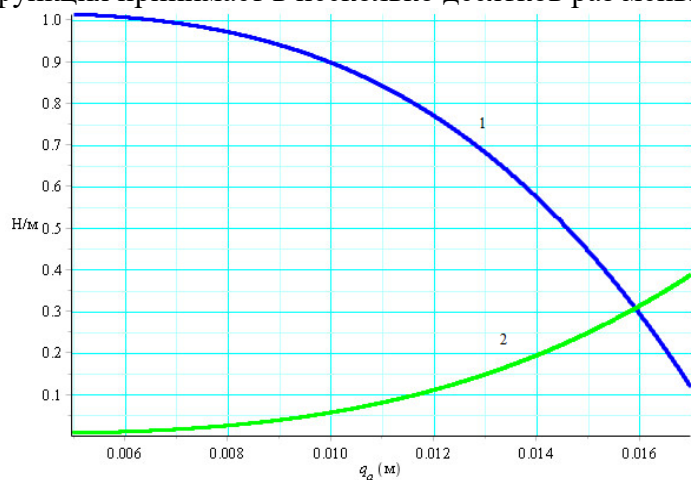


Рис. 4. Графики функции $u_1(x)$, $u_2(x)$ и $u_3(x)$ (соответственно, линии 1, 2, 3)

стержня без динамического гасителя $c_{1*}=0$; $b_F=0$ (рис.6, линия 3) увеличивается в несколько раз. При наличии в системе динамического гасителя с жидкостным звеном передаточная функция принимает в несколько десятков раз меньшие значения.



Это указывает на то, что динамический гаситель с жидкостным звеном эффективен для гашения колебаний на низких частотах. Если $c_{1*}=10^2$ Н/м; $b_F=10^2$ Н·с/м (см.рис.6, линия 1) и $c_{1*}=10^5$ Н/м; $b_F=10^5$ Н·с/м (см.рис.6, линия 2), то минимальное значение передаточной функции будет при $c_{1*}=10^5$ Н/м; $b_F=10^5$ Н·с/м. Эти значения параметров будут эффективными, если учесть, что при значительно превышении значения жесткости c_{1*} и коэффициента демпфирования b_F , $c_{1*}=10^5$ Н/м; $b_F=10^5$ Н·с/м, т.е. пружина и демпфер становятся твердыми.

Заключение.

1. Система дифференциальных уравнений движения, определенная методом графов связей, представляет собой математическую модель движения стержня с упругодиссипативной характеристикой гистерезисного типа и динамического гасителя с жидкостным звеном.
2. Полученная передаточная функция виброзащищаемого стержня дает возможность исследовать динамику системы при кинематических воздействиях.
3. Наличие нелинейных упругодиссипативных свойств материала виброзащищаемого стержня и жидкости динамического гасителя обуславливает качественные особенности, связанные с определением параметров системы.
4. Можно определить абсолютное значение передаточной функции при переменных q_{ia} и ω , в котором достигается минимум, а также выбрать оптимальные значения, связывающие эти параметры виброзащитной системы.

Литература

- [1] Chang Ch.M., Strano S., Terzo M. Modelling of hysteresis in vibration control systems by means of the Bouc-Wen model // Shock and Vibration. 2016. Article ID 3424191. P. 14. <http://dx.doi.org/10.1155/2016/3424191>.
- [2] Palazzo B., Castaldo P., Marino I. The Dissipative column: A New hysteretic damper // Journal of buildings. Vol. 5. 2015. P.163–178.
- [3] Roberts J.B., Spanos P.D. Random vibrations and statistical linearization. Dover publications press. New York, 2003. P. 476.
- [4] Smyth A.W., Masri S.F., Kosmatopoulos E.B., Chassiakos A.G., Caughey T.K. Development of adaptive modeling techniques for nonlinear hysteretic systems // International Journal of Non-Linear Mechanics. Vol. 37. 2002. P.1435–1451.
- [5] Jang S.-H., Kim S.-M., Kim Sh.-G., Choi Y.-H., Park J.-K. A study of the design of a cantilever type multi-d.o.f. dynamic vibration absorber for micro machine tools // Proceedings of the 14th international congress on sound and vibration, Cairns, Australia, July 9-12. 2007. P.321–328.
- [6] Laxalde D., Thouverez F., Sinou J. Dynamics of a linear oscillator connected to a small strongly nonlinear hysteretic absorber // Journal of nonlinear mechanics. Vol. 41. 2006. P.969–978.

- [7] *Malher A., Doar'e O., Touz'e C.* Influence of a hysteretic damper on the utter instability // Journal of Fluids and Structures. Vol. 68. 2017. P.356–369.
- [8] *Радыш Ю.В.* Исследование гидродинамического момента, действующего на твердое тело в поплачковом подвесе // Механика гироскоп систем. 1982. №1. С.85–92.
- [9] *Дусматов О.М.* Моделирование динамики виброзащитных систем. Ташкент: Фан. 1997. –167 с.
- [10] *Karnopp D.C., Margolis D.L., Rosenberg R.C.* System dynamics. John Wiley & sons, Inc. 2012. –636 p.
- [11] *Robert T.McB.* System analysis through bond graph modeling. A dissertation for the degree of doctor of philosophy. The University Of Arizona. 2005. – 228 p.
- [12] *Arun K.S., Belkacem O.B.* Model-based process supervision. A bond graph approach. Springer-Verlag London: Limited. 2008. –489 p.
- [13] *Lorcan S.P.S S.* Bond graph modelling of physical systems. A Dissertation submitted to the Faculty of Engineering of Glasgow University degree of Doctor of Philosophy. Published by ProQuest LLC. 2018. –241 p.
- [14] *Borutzky W.* Bond graph methodology. Development and analysis of multidisciplinary dynamic system models. Springer. 2010. – 348 p.
- [15] *Borge R.* A Bond graph approach for modelling systems of rigid bodies in spatial motion. Norwegian University of Science and Technology. 2014. –170 p.
- [16] *Casimir S.K., Genevieve D.T.* Bond graph models of structured parameter uncertainties. // Journal of the Franklin Institute. Vol. 342. 2005. P. 379–399.
- [17] *Mirsaidov M.M., Dusmatov O.M., Khodjabekov M.U.* Dynamics of the rod protected from vibration under kinematic excitations // International Scientific Conference “Construction Mechanics, Hydraulics & Water Resources Engineering”, CONMECHYDRO 2021 AS, September 7-9. Tashkent, 2021.
- [18] *Mirsaidov M., Dusmatov O., Khodjabekov M.* Mode Shapes of Transverse Vibrations of Rod Protected from Vibrations in Kinematic Excitations. Lecture Notes in Civil Engineering. 2022. N 170. P.217–227.
- [19] *Mirsaidov M., Dusmatov O., Khodjabekov M.* The problem of mathematical modeling of a vibration protected rod under kinematic excitations. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2021. 1030(1), 012069. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/1030/1/012069>.
- [20] *Ходжабеков М.У.* Тебранишлардан химояланувчи стерженнинг частота тенгламаси тахлили // Ilm sarchashmalari. 2021. № 9. Б.19–22.
- [21] *Ahmedov O., Mirsaidov M.* Finite element of rotating wheelset and its natural frequencies determination. Materials Physics and Mechanics. 2021. N 47(5). P. 706–719.
- [22] *Mirsaidov M.M., Khudainazarov Sh.O.* Spatial natural vibrations of viscoelastic axisymmetric structures. // Magazine of Civil Engineering. Vol. 96. 2020. P. 118–128. DOI: 10.18720/MCE.96.10.
- [23] *Ishmatov, A.N., Mirsaidov, M.* Nonlinear vibrations of an axisymmetric body acted upon by pulse loads. // Soviet Applied Mechanics. Vol. 27. 1991. No 4. P. 388–394. DOI: 10.1007/BF00896519.
- [24] *Писаренко Г.С., Богинич О.Е.* Колебания кинематически возбуждаемых механических систем с учетом диссипации энергии. Киев: Наукова думка, 1981. – 219 с.
- [25] *Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В.* Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. Справочник. Киев: Наукова думка, 1971. –327 с.
- [26] *Павловский М.А., Рыжков Л.М., Яковенко В.Б., Дусматов О.М.* Нелинейные задачи динамики виброзащитных систем. Киев: Техника, 1997. – 204 с.

Дата поступления
05.01.2022

Ходжабеков М.У. Эластик стерженнинг суюқлик бўғинли динамик сўндиргич билан биргаликдаги нозизиқли тебранишлари

Аннотация: Мақолада эластик стерженнинг суюқлик бўғинли динамик сўндиргич билан биргаликдаги чизиқлимас кўндаланг тебранишлари масаласи қаралган. Қаралаётган тебранишлардан химояланувчи системани математик моделлаштириш методикаси граф боғланишлар усулига асосланган. Ушбу системанинг динамикасини ўрганиш учун тебранишлардан химояланувчи стерженнинг узатиш функцияси олинган. Динамик сўндиргичнинг самарадорлиги система конструктив параметрларининг турли қийматларида баҳоланган.

Калим сўзлар: эластик стержен; динамик сўндиргич; граф боғланишлари; гистерезис; суюқлик бўғин; кинематик қўзғалишлар.

Khodjabekov M.U. Nonlinear vibrations of an elastic rod with a liquid section dynamic absorber

Abstract: In the article the problem of nonlinear transverse vibrations of an elastic rod with a liquid section dynamic absorber is considered. The method of mathematical modeling of the considered vibration protection system is bas on the use of the method of bond graphs. To study the dynamics of this system, the transfer function of the protected rod is obtain. The efficiency of a dynamic absorber is estimat at various values of the system's design parameters.

Keywords: elastic rod; dynamic absorber; bond graph; hysteresis; liquid section; kinematic excitations.

КОЛЕБАНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ГРУНТОМ

Хусаинов Р. Б.

*Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М.Т.Уразбаева АН РУз. Ташкент, Узбекистан
Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механики
сельского хозяйства». Ташкент, Узбекистан
E-mail: r.khusainov89@yandex.com*

Аннотация: Приводится решение задачи продольного колебания подземного трубопровода с учетом вязкоупругопластического взаимодействия в системе «труба–грунт». Сейсмическое воздействие на грунт принимается в виде бегущей волны синуса. На основе использования данных, полученных в опытах, решается нелинейная задача для модели сухого трения. Задача решается при свободных и закрепленных граничных условиях. Исследуется НДС подземного трубопровода при линейном и нелинейном взаимодействии с грунтом. Задачи решаются методом конечных разностей с учетом различных грунтовых условий. Определяются опасные точки возникновения максимальных напряжений при воздействии сейсмических нагрузок на подземный трубопровод. Полученные данные иллюстрируются в виде графиков и подкрепляются анализом результатов. Устанавливаются различные закономерности изменения перемещений и напряжений в сечениях стальных трубопроводов по времени и координате при воздействии в виде бегущей волны синуса.

Ключевые слова: труба; грунт; взаимодействие; пластичность; вязкость; упругость; напряжение; деформация.

Введение. Постановка и решение любой инженерной задачи всегда связаны с идеализацией реальных процессов и явлений, поскольку учесть все факторы, оказывающие хоть в какой-то мере влияние на течение процесса, невозможно. Поэтому при постановке задачи выделяется ряд параметров, играющих определяющую роль в данных условиях работы. При решении прикладных задач сейсмостойкости подземных конструкций существенное значение имеет вопрос о характере и величине усилий, возникающих на контакте поверхности конструкции с окружающей средой при наличии относительных смещений. Характер самого сейсмического движения грунта в окрестности сооружения предполагается заранее известным. Таким образом, под взаимодействием подразумеваются характер и величина силы трения, действующей на контактирующие с грунтом поверхности сооружения при наличии относительных смещений, вызванных действием сейсмической нагрузки при наличии их физико-механических свойств.

Поведение подземных сооружений при сейсмическом воздействии во многом определяется характером грунтовых условий. При проведении сейсמודинамического расчета степень соответствия полученных результатов действительному процессу существенно зависит от того, насколько выбранная модель взаимодействия конструкции с грунтом отвечает реальному характеру взаимодействия.

В работе [1] впервые учтено проскальзывание трубы относительно окружающего грунта при распространении сейсмической волны. Выведено дифференциальное уравнение продольных колебаний трубопровода и получено его решение для конечного и полубесконечного трубопровода при гармонической и импульсной нагрузках.

Экспериментально установлено, что закон взаимодействия подземных сооружений с различными грунтами в общем случае носит нелинейный характер. Определены параметры, характеризующие нелинейные, упругие, пластичные и вязкие свойства взаимодействия подземного трубопровода с грунтом [2].

В работе [3] проведены исследования влияния упругопластических свойств взаимодействия на сейсмические колебания системы подземных трубопроводов, в качестве расчетной схемы которой выбрана система с конечным числом степеней свободы.

В работах [4–5] решена двумерная осесимметричная нестационарная волновая задача для системы «подземный трубопровод–грунт». В этом случае трубопровод и грунт

принимаются как линейно-деформируемые тела. Предлагаемое условие (модель) взаимодействия на контактной границе учитывает структурное разрушение контактного слоя грунта и цикличность процесса взаимодействия. На поверхности их контакта сила взаимодействия (трение) определяется по двухступенчатому (предпредельному и предельному) закону. В работе [6] рассматривается проблема создания новых моделей деформирования грунтов и горных пород, учитывающих структурные разрушения. Для этого сопоставлены модели взаимодействия подземных сооружений с грунтом с моделями деформирования самих грунтов. Показан переход от моделей деформирования к моделям взаимодействия. В работе [7] приводится численное решение связанных одномерных волновых задач о распространении продольных волн в грунтовом полупространстве и подземном трубопроводе. Определены продольные напряжения в трубопроводе на различных его сечениях от начального сечения, которые совпадают с начальным сечением грунтового полупространства [8].

В работах [9–13] проанализировано использование различных механических математических моделей и решен ряд актуальных задач подземных и наземных сооружений. В [14] изучены колебания подземного трубопровода с учётом вязко-упруго-пластического взаимодействия с грунтом; пластические свойства взаимодействия учитываются по модели сухого трения, предложенной в работах [15–16]. В работах [17–25] подробно изучено влияние коэффициентов упругости, вязкости и пластичности взаимодействия трубопровода на контакте с грунтом на напряженно-деформированное состояние подземного трубопровода. В работах [21, 24] подробно изучено влияние сил инерции на деформированное состояние подземного трубопровода. В [26] рассмотрено влияние сейсмической волны на подземный трубопровод.

Сейсмостойкость подземного трубопровода была и остаётся одной из актуальных проблем, стоящих перед учёными всего мира. В этом плане заслуживают внимания исследования зарубежных учёных, которыми получено несколько соотношений между касательным напряжением и перемещением при изучении упругопластического взаимодействия трубы и грунта. Например, в работе [16] выявлено касательное напряжение на контакте трубопровода с песком и глиной. Проф. К.С. Султановым проведено множество экспериментов для определения свойств взаимодействия трубопровода с грунтом для грунтов нарушенной и ненарушенной структур. В работе [15] приведены графики зависимости касательного напряжения на поверхности контакта от перемещений, построенные с учётом экспериментальных данных. Приведем один из графиков из монографии [15].

Проявление пикового значения касательного напряжения τ_r при взаимодействии фрагментов с грунтом, так же как при сдвиге самих образцов грунта, связано с процессом накопления пластических деформаций и разрушения структуры грунта. После достижения относительным смещением значения u^* структурные связи грунта с фрагментом полностью разрушаются и касательное напряжение при значениях τ_r остается постоянным при дальнейшем увеличении смещения фрагмента относительно грунта. Как показывают результаты опытов по взаимодействию фрагментов с грунтами ненарушенной структуры, значение u^* не меняется при различных скоростях взаимодействия.

Кривые 1, 2 на рис. 1 получены при взаимодействии гладкого фрагмента с лёссовым грунтом в квазистатическом режиме [15].

Результаты опытов по взаимодействию фрагментов внешней поверхности подземных сооружений с грунтом нарушенной структуры показывают, что изменение касательного напряжения в зависимости от относительного смещения на поверхности контакта фрагмент–грунт, также как в случае взаимодействия подземных труб с грунтом, состоит из двух стадий. Первая стадия – когда значение касательного напряжения развивается в зависимости от относительного смещения, а вторая – когда касательное напряжение не зависит от изменения значений относительных смещений.

В случае грунта ненарушенной структуры в зависимостях $\tau(u)$ проявляется пиковое значение касательного напряжения. Значения предельного касательного напряжения в случаях нарушенной и ненарушенной

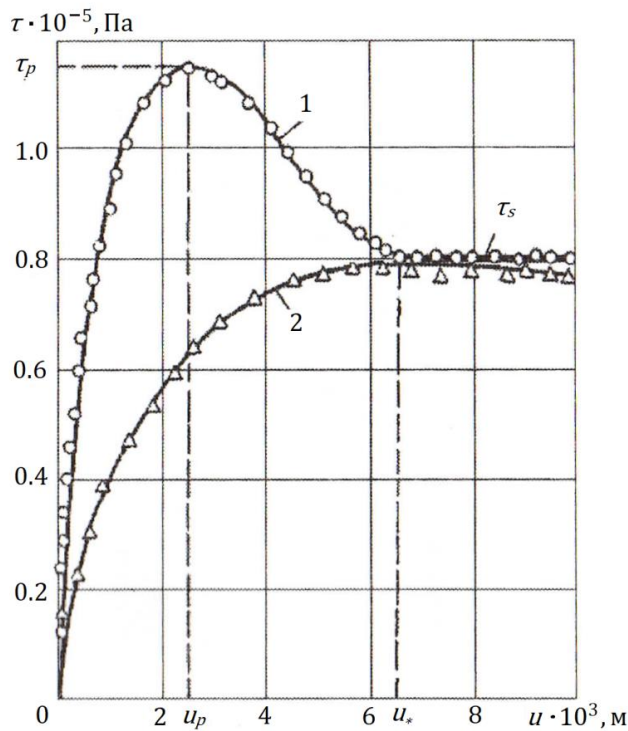


Рис. 1. Зависимости касательного напряжения от относительного смещения

структур грунтов при постоянстве шероховатости поверхности фрагмента и нормального давления одинаковые.

На основании вышеизложенного анализа результатов опытов ясно, что в модели взаимодействия твердых тел с грунтом значение касательного напряжения в первой стадии процесса взаимодействия должно зависеть от относительного смещения. Во второй стадии взаимодействия, очевидно, выполняется закон Кулона. Возвратное движение описывается также законом Винклеровского типа.

Результаты экспериментов по взаимодействию подземных сооружений и их фрагментов с грунтами показывают, что скорость взаимодействия влияет на закономерности взаимодействия, особенно в случае грунта ненарушенной структуры, в первой стадии процесса взаимодействия.

В работе [15] приведены три типа математических моделей взаимодействия твердых тел с грунтом: Винклеровский, Кельвина–Фойгта и стандартно-линейного тела.

В модели взаимодействия типа Кельвина–Фойгта при нагружении до предела упругости u_* касательное напряжение определяется по модели Кельвина–Фойгта в следующем виде:

$$\tau = K_x(\sigma_N, I_s)u + \eta_s(\sigma_N, I_s) du/dt \quad \text{при } du/dt \geq 0, 0 \leq u \leq u_*, \quad (1)$$

за пределом упругости касательное напряжение определяется по закону сухого трения:

$$\tau = f_u \sigma_N \quad \text{при } du/dt \geq 0, u > u_*, \quad (2)$$

разгрузка до предела упругости осуществляется по модели Винклера, т.е.

$$\tau = K_x^R(\sigma_N, I_s)u \quad \text{при } du/dt < 0, 0 \leq u \leq u_*, \quad (3)$$

за пределом упругости касательное напряжение при разгрузке равняется нулю:

$$\tau = 0 \quad \text{при } du/dt < 0, u > u_*, \quad (4)$$

где σ_N – нормальное к поверхности контакта сооружение–грунт напряжение; σ_N^* – предел прочности контактной связи грунта и сооружения на растяжение; $K_x(\sigma_N, I_s)$ – коэффициент взаимодействия; $\eta_s(\sigma_N, I_s)$ – коэффициент сдвиговой вязкости; $K_x^R(\sigma_N, I_s)$ – коэффициент взаимодействия при возвратном движении сооружения относительно грунта; f_u – коэффициент трения; u_* – критическое значение относительного смещения, при котором происходит переход от одной стадии взаимодействия в другую. Параметр $I_s = [u/u_*]$ определяет степень разрушенности структуры грунта в процессе взаимодействия. В случае $I_s = 0$ грунт на контактом слое считается ненарушенным, а в случае $I_s = 1$ – полностью разрушенным. В остальных случаях $0 < I_s < 1$. $K_x^D(\sigma_N, I_s)$ – коэффициент динамического (при $\dot{u} \rightarrow \infty$) взаимодействия; $K_x^S(\sigma_N, I_s)$ – коэффициент квазистатического (при $\dot{u} \rightarrow 0$) взаимодействия;

μ_s – параметр сдвиговой вязкости грунта, связанный с коэффициентом сдвиговой вязкости грунта η_s .

В работе [15] предложенный закон взаимодействия, основанный на модели стандартно-линейного тела и законе Кулона, имеет следующий вид:

при нагружении до предела упругости ($du/dt \geq 0, 0 \leq u \leq u_*$):

$$\frac{d\tau}{K_x^D(\sigma_N, I_S)dt} + \mu_s(\sigma_N, I_S, \dot{u}) \frac{d\tau}{K_x^S(\sigma_N, I_S)dt} = \frac{du}{dt} + \mu_s(\sigma_N, I_S, \dot{u})u,$$

за пределом упругости при нагружении ($du/dt \geq 0, u > u_*$):

$$\tau = f_u \sigma_N;$$

разгрузка до предела упругости ($du/dt < 0, 0 \leq u \leq u_*$):

$$\frac{d\tau}{K_x^R(\sigma_N, I_S)dt} = \frac{du}{dt};$$

за пределом упругости ($du/dt < 0, u > u_*$):

$$\tau = 0.$$

Американское общество инженеров–строителей (АОИС), Технический совет по сейсмостойкому строительству жизненно важных коммуникаций (ТСССЖВК) предложили для анализа идеализированные упругопластические модели, как показано на рис. 2. Отметим, что

упругопластическая модель полностью характеризуется двумя параметрами; максимальные сопротивления t_u, p_u, q_u в горизонтальном осевом, горизонтальном поперечном и вертикальном поперечном направлениях, соответственно, имеющие единицы силы на единицу длины и максимальные упругие перемещения x_u, y_u, z_u , имеющие единицы расстояния [16].

Эквивалентные коэффициенты упругой грунтовой пружины, имеющие единицы силы на единицу площади, представляют собой отношение максимального сопротивления, разделенное на половину максимальной упругой деформации, например $2t_u/x_u$ для горизонтального осевого (продольного) случая. Причем этот коэффициент пружины эффективен только для относительных смещений, меньших, чем максимальные значения x_u, y_u, z_u после которых сопротивление является постоянным.

Относительное перемещение, параллельное оси трубы, является результатом продольных сил взаимодействия системы «труба–грунт. Для упругопластических моделей инструкция АОИС обеспечивает следующие отношения для глины и песка:

для песка:

$$t_u = \pi/2 D \gamma H (1+k_0) \tan \phi, \quad x_u = 2.54 \sim 5.0 \cdot 10^{-3} \text{ м} \quad (5)$$

для глины:

$$t_u = \pi D \alpha S_u, \quad x_u = 5.08 \sim 10.16 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad (6)$$

где D – диаметр трубы; S_u – сила сдвига окружающей почвы; α – эмпирический коэффициент прилипания, изменяемый с S_u ; γ – эффективный вес грунта; H – глубина заложения от срединной линии трубы; ϕ – угол сопротивления сдвига песка; k_0 – коэффициент бокового давления почвы в покое. Величина k_0 для нормально консолидированных несвязанных грунтов колеблется от 0.35 до 0.47. Тем не менее k_0 может быть больше за счет узлов и упрочнения почвы, окружающей трубопровод. В [16] $k_0=1.0$ рекомендован для большинства условий уложения подземных трубопроводов. Наконец, k – коэффициент затухания в зависимости от внешних поверхностных характеристик и твердости трубы. Для конкретных труб, стальных или покрытых цементом, чугунных труб $k=1.0$, для чугуна или грубой поверхностной стали k колеблется от 0.7 до 1.0, а для гладкой (плавной) поверхностной стали или для трубы с гладкой поверхностью (плавной), сравнительно жестким покрытием k изменяется в интервале от 0.5 до 0.7.

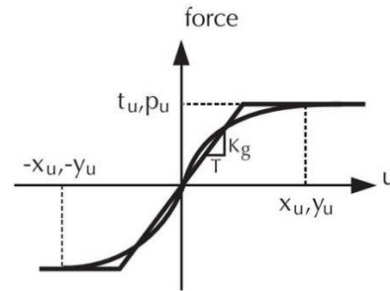


Рис. 2. Идеализированные соотношения нагрузка–деформация на границе раздела труба–грунт

Следует подчеркнуть, что модель, приведенная в формуле (5), является частным случаем модели взаимодействия типа Кельвина–Фойгта, показанной в формулах (1)–(4), при $I_S=1$.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу продольного колебания подземного трубопровода при вязкоупругопластическом взаимодействии на контакте с грунтом при двух видах закрепления. Уравнение колебания в относительных перемещениях имеет следующий вид:

$$m \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - EF \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + (2\pi R\mu / H) \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + 2\pi R\tau_i = EF \cdot \frac{\partial^2 u_g}{\partial x^2} - m \cdot \frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2}. \quad (7)$$

Граничные условия:

$$\text{а) } \bar{u}(0, t) = 0, \quad \text{б) } \bar{u}(l, t) = 0.$$

Начальные условия нулевые, т.е.

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0,$$

где $\bar{u}(x, t) = u(x, t) - u_g(x, t)$ – относительное перемещение между трубой и грунтом в сечении x трубопровода в момент времени t ; $u_g(x, t)$ – перемещение грунта в сечении x трубопровода вдоль оси x в момент времени t ; $u(x, t)$ – абсолютное перемещение сечения x трубопровода вдоль оси x в момент времени t .

Переходим к безразмерным переменным по следующим формулам:

$$\bar{\bar{u}} = u / A, \quad \bar{\bar{u}}_g = u_g / A, \quad \bar{x} = x / a, \quad \bar{t} = t / b, \quad (8)$$

где $a = \sqrt{EF / (2\pi Rk_x)}$, $b = \sqrt{m / (2\pi Rk_x)}$.

Методы решения. Для решения уравнения (7) применим неявную схему метода конечных разностей, так как использование нижеприведенных аппроксимаций приводит к получению результатов второго порядка точности. Неявная схема обладает абсолютной устойчивостью.

Аппроксимации дифференциалов функции по времени и координатам имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \bar{\bar{u}}}{\partial \bar{t}^2} \approx \frac{\bar{\bar{u}}_i^{j+1} - 2\bar{\bar{u}}_i^j + \bar{\bar{u}}_i^{j-1}}{\tau^2}, \quad \frac{\partial^2 \bar{\bar{u}}}{\partial \bar{x}^2} \approx \frac{\bar{\bar{u}}_{i+1}^{j+1} - 2\bar{\bar{u}}_i^{j+1} + \bar{\bar{u}}_{i-1}^{j+1}}{h^2}, \quad (9)$$

где τ и h – шаг по времени и шаг по координате.

Частное производное по времени и перемещению аппроксимируется в следующем виде:

$$\frac{\partial \bar{\bar{u}}}{\partial \bar{t}} \approx \frac{\bar{\bar{u}}_i^{j+1} - \bar{\bar{u}}_i^{j-1}}{2 \cdot \tau}, \quad \bar{\bar{u}} \approx \frac{\bar{\bar{u}}_i^{j+1} + \bar{\bar{u}}_i^{j-1}}{2}. \quad (10)$$

Для анализа распространения волн Т.Р. Рашидов и Ньюмарк [16] предложили простую процедуру с учетом одной бегущей волны с незатухающей (бегущей) волновой формой. Перемещение грунта параллельно трубе можно записать в виде

$$u_g = A \cdot \sin \omega(t - x / C_p) \cdot H(t - x / C_p) \quad (11)$$

где $H(t - x / C_p)$ – функция Хевисайда; A – амплитуда движения грунта, ω – частота колебаний сейсмической волны, определяемая по формуле $\omega = 2\pi / T$; C_p – «кажущаяся скорость» распространения волны (далее будем ее называть скоростью распространения волны в грунте). «Кажущаяся скорость» распространения волны в грунте может быть большей за счёт угла падения волны к оси трубопровода или за счёт податливых стыков трубопровода.

Закон движения грунта при сейсмическом воздействии примем в виде бегущей волны синуса, показанной в формуле (11).

Результаты и обсуждение. Используем модель взаимодействия, приведенную в формуле (5), для трубопровода с обоими закрепленными концами. Механические свойства трубы и материальные свойства песчаных и глинистых грунтов приведены в табл. 1–3.

Таблица 1

Механические свойства трубы

Тип трубы	Диаметр, мм	Толщина, мм	Плотность, кг/м ³
Steel– API–X65	400	9.5	7850
Модуль упругости E, ГПа	Коэффициент Пуассона ν	Допустимое напряжение σ_y , МПа	Предел прочности σ_u , МПа
210	0.3	465.4	517.7

Таблица 2

Физико-механические свойства песчаных грунтов

Показатель	Тип грунта		
	слабый или рыхлый песок	средний песок	плотный песок
Объемный вес γ , КН/м ³	14	18	22
Угол внутреннего трения ϕ , градус	28	35	45
Угол трения между трубой и грунтом, градус	17	21	27
Скорость сдвиговой волны V_s , м/с	75	220	450

Таблица 3

Физико-механические свойства глинистых грунтов

Показатель	Тип грунта		
	мягкая глина	средняя глина	твердая глина
Объемный вес γ , КН/м ³	16	18	21
Коэффициент сцепления S_u , Кпа	10	50	200
N'_{70}	0–2	6–10	20–30
Скорость сдвиговой волны V_s , м/с	75	220	450

Механические и геометрические параметры задаем в следующих значениях: $\gamma_g=18$ кН/м³; $\phi=35^\circ$; $H=1.2$ м; $x_u=3 \cdot 10^{-3}$ м; $k_0=1$; $k=1$; $D=0.4$ м; $s=0.0095$ м; $A=0.007$ м; $\rho=7850$ кг/м³; $t_u=[\pi D \gamma H(1+k_0)\tan k\phi]/2$; $k_x=1.266 \cdot 10^4$ кН/м³.

Длина волны в грунте больше, чем длина трубопровода.

При модели взаимодействия по формуле (5), за пределом упругости, за счёт разрушения структуры грунта в зонах, расположенных ближе к поверхности трубопровода, касательные напряжения остаются постоянными по закону сухого трения Кулона.

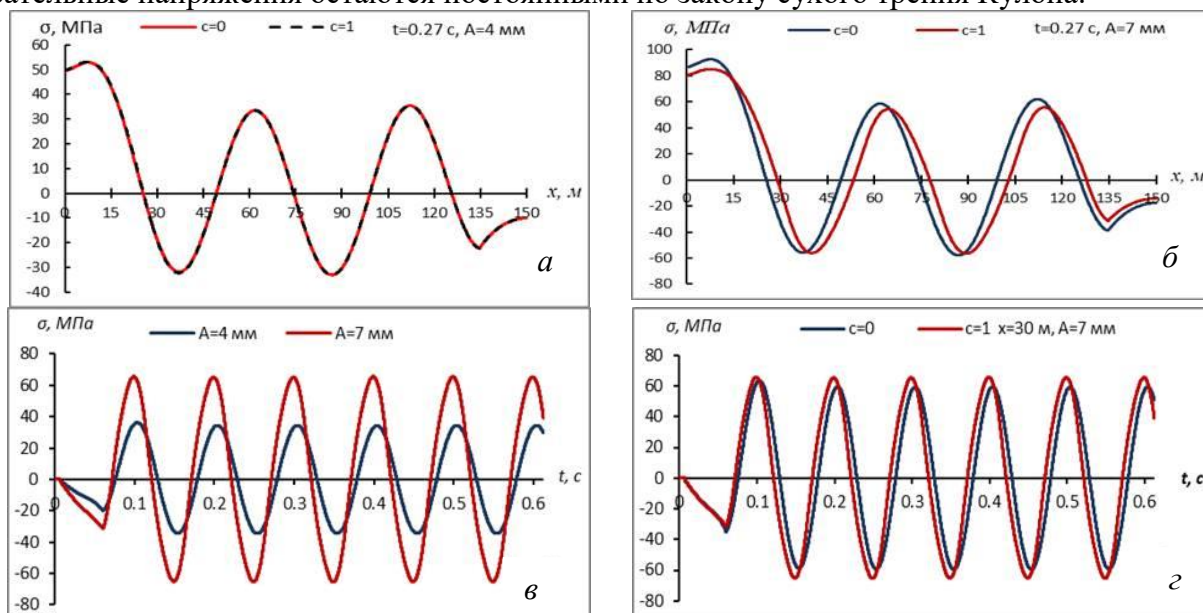


Рис. 3. Сравнение изменения напряжений по координате (а), (б) и по времени (в), (з) для вязкоупругого и вязкоупругопластического взаимодействия трубопровода с грунтом

Приведем сравнительный график результатов расчетов для моделей линейно вязкоупругого взаимодействия и, в частном случае, при $I_s=1$ для модели взаимодействия типа Кельвина–Фойгта по формулам (1)–(4) [14]. Здесь c – коэффициент упрочнения модели взаимодействия, при вязкоупругой модели взаимодействия системы «труба–грунт» $c=0$; при вязкоупругопластической модели взаимодействия системы «труба–грунт» $c=1$.

Установлено, что значения амплитуды колебания грунта и предел упругости взаимодействия играют важную роль при НДС подземного трубопровода (рис. 3, а, б, ...).

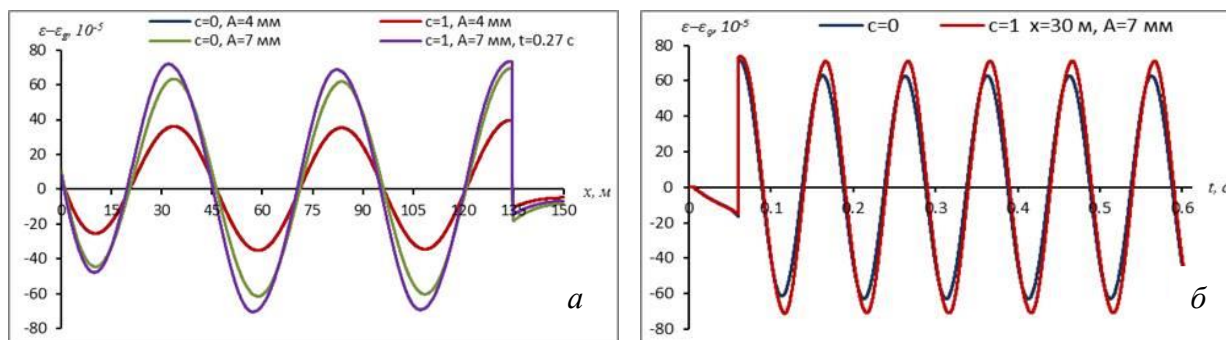


Рис. 4. Изменение разности деформации трубы и грунта по координате (а) и по времени (б)

Результаты показывают, что при взаимодействии в виде сухого трения фаза колебания сдвигается (см. рис.3, з). Амплитуда влияет на результаты относительного перемещения и разность деформации трубы и грунта, на линейное и нелинейное взаимодействие [14]. Сравнительные результаты показаны на рис. 4 и 5.

Относительное перемещение подземного трубопровода по модели взаимодействия по формуле (5) больше, чем по вязкоупругой модели (см. рис. 5, а, б).

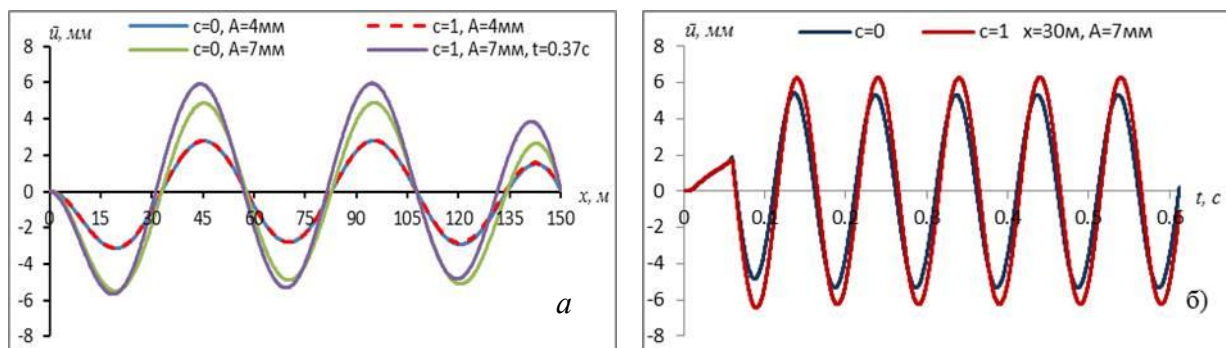


Рис. 5. Изменение относительного перемещения по координате (а) и по времени (б)

На рис. 7 показан цикл взаимодействия системы «труба–грунт» Для анализа процесса используем обозначение R , принимающее следующие значения:

а) для нагрузки до предела упругости $R=1.1$; б) для нагрузки больше предела упругости $R=1.2$; в) для разгрузки до предела упругости $R=0.1$; г) для разгрузки больше предела упругости $R=0.2$.

На рис. 7, а показано сравнение цикла нагрузки–разгрузки для амплитуд колебаний грунта при $A=4$ и 7 мм, а на рис 7, б – при $A=7$ мм.

При циклическом взаимодействии системы «труба–грунт» предел упругости взаимодействия изменяется (рис. 8).

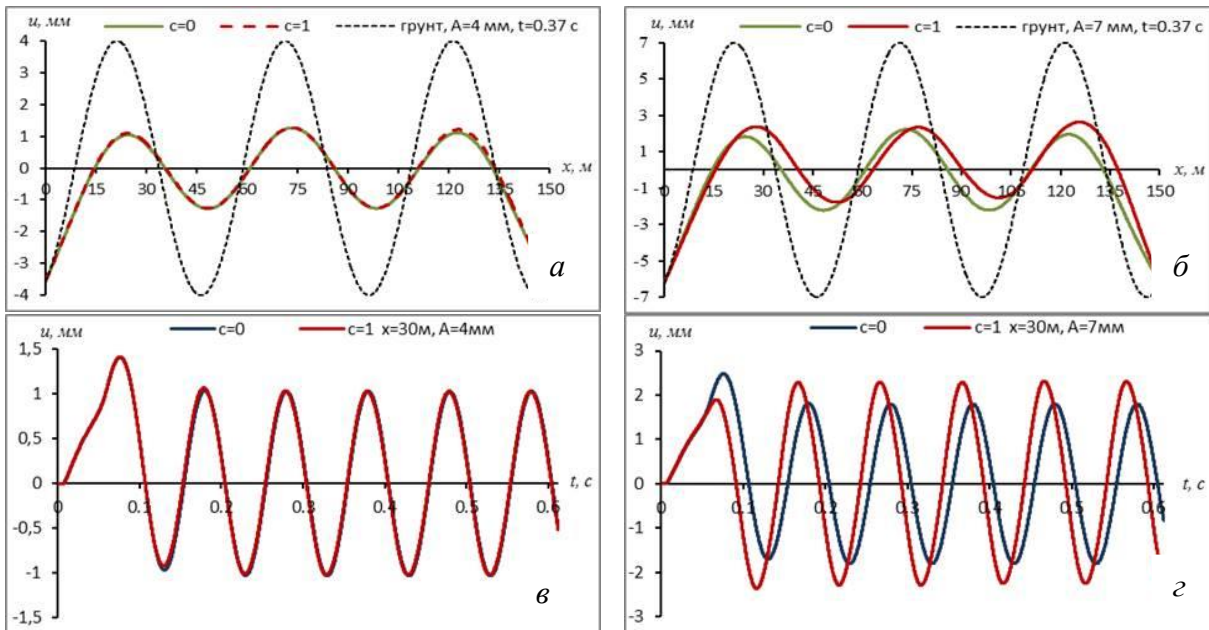


Рис. 6. Изменение напряжений по координате (а), (б) и по времени (в), (г) для вязкоупругого и вязкоупругопластического взаимодействия трубопровода с грунтом

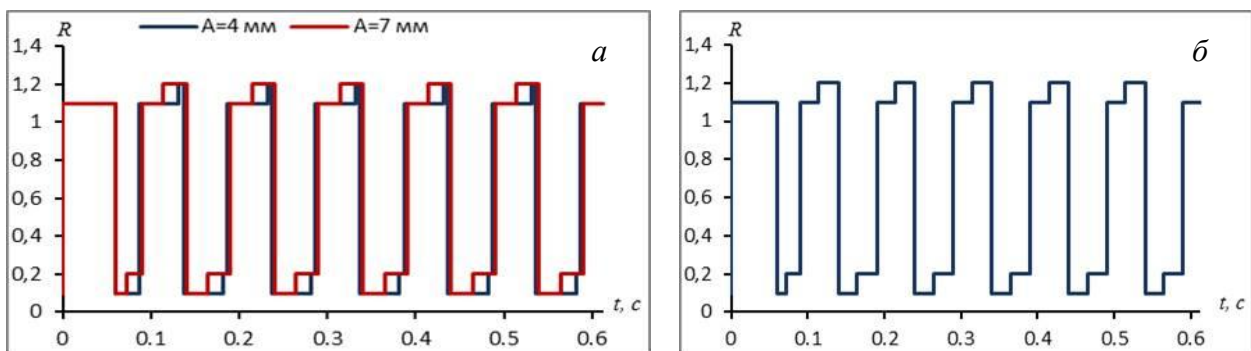


Рис. 7. Изменение параметра R по времени, сравнение при A=4 и 7 мм (а) и при A=7 мм (б)

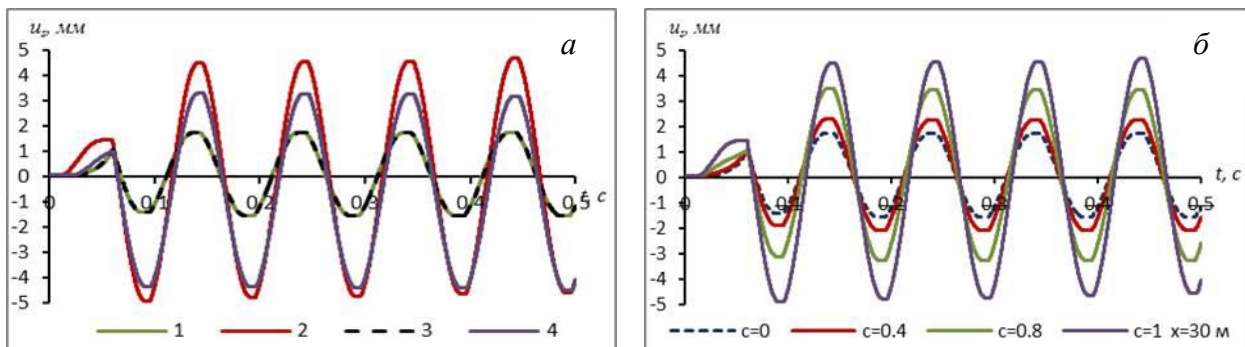


Рис.8. Изменение верхнего предела упругости по времени: 1 – при $c=0$, оба конца закреплены; 2 – при $c=1$, оба конца закреплены; 3 – при $c=0$, оба конца трубопровода свободны; 4 – при $c=1$, оба конца трубопровода свободны

Сравнительный анализ показывает, что учет нелинейности взаимодействия трубопровода с грунтом приводит к увеличению относительного перемещения между трубой и грунтом и к уменьшению значения нормального напряжения трубопровода. При закрепленных к грунту торцах трубопровода максимальное относительное перемещение подземного трубопровода больше, чем при свободных от напряжений торцах при учете нелинейности взаимодействия.

Выводы. Установлены различные закономерности изменения перемещений и напряжений в сечениях стальных трубопроводов по времени и координате при воздействии в виде бегущей волны синуса. В частности, показано, что возникающие абсолютные максимальные значения напряжений при учете вязкоупругопластического взаимодействия трубопровода с грунтом меньше, чем при вязкоупругом взаимодействии в зависимости от коэффициента упрочнения. Чем больше коэффициент упрочнения, тем меньше напряжение на подземном трубопроводе.

Разработан численный метод решения краевых задач для уравнений в частных производных, описывающий волновые процессы в трубопроводах при вязкоупругопластическом их взаимодействии с окружающим грунтом.

На основе использования данных, полученных в опытах, решена нелинейная задача для модели сухого трения. Полученные данные проиллюстрированы в виде графиков и подкреплены анализом результатов.

Уложение подземного трубопровода в траншею при условии рыхлых и дисперсных грунтов приводит к уменьшению деформации и, соответственно, к снижению напряжений. Использование грунта с меньшим пределом упругости взаимодействия способствует снижению напряжений в подземном трубопроводе, но возрастанию при этом перемещения трубы.

Литература

- [1] Рашидов Т.Р. Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений. Ташкент: Фан, 1973. – 180 с.
- [2] Рашидов Т.Р., Хожметов Г.Х. Сейсмостойкость подземных трубопроводов. Ташкент: Фан, 1985. –152 с.
- [3] Seleznev V.E. Numerical simulation of a gas pipeline network using computational fluid dynamics simulators // Journal of Zhejiang University SCIENCE A. Vol. 5. China, 2007. № 5. P. 755–765.
- [4] Sultanov K., Khusanov B. and Rikhsieva B. Underground pipeline strength under non-one-dimensional motion // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 883 (1), 2020. 012023.
- [5] Sultanov K.S., Khusanov B.E., Rikhsieva B.B. Mathematical model of underground structure-soil interaction // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 962 (3), 2020. 032021.
- [6] Ronghuan Xu, Ruinian Jiang, Tie-jun Qu. Review of Dynamic Response of Buried Pipelines // Journal of Pipeline Systems Engineering and Practice. Vol. 12, May 2021. Issue 2.
- [7] Султанов К.С., Логинов П.В., Рихсиева Б.Б., Кумаков Ж.Х. Разрушение подземных протяженных конструкций при их контактном взаимодействии с грунтом. XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Уфа, 19–24 августа 2019. С. 803–805.
- [8] Sultanov K. S., Vatin N. I. Wave Theory of Seismic Resistance of Underground Pipelines // Appl. Sci. 2021. (11), №4. 1797. <https://doi.org/10.3390/app11041797>.
- [9] Mirsaidov M. M., Sultanov T Z. Assessment of stress-strain state of earth dams with allowance for non-linear strain of material and large strains. Mag. Civ. Eng. 49. P. 73–82. <https://doi.org/10.5862/MCE.49.8>.
- [10] Abirov R.A., Khusanov B.E., Sagdullaeva D.A. Numerical modeling of the problem of indentation of elastic and elastic-plastic massive bodies. IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 971. 2020. 032017.
- [11] Mirsaidov M.M., Abdikarimov R.A., Khodzhaev D.A. Dynamics of a viscoelastic plate carrying concentrated mass with account of physical nonlinearity of material // PNRPU Mech Bull. 2019. № 2. P. 143–155.
- [12] Abirov R.A., Khusanov B.E., Sagdullaeva D.A. Numerical modeling of the problem of indentation of elastic and elastic-plastic massive bodies. IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 971. 2020. 032017.
- [13] Mirsaidov M.M., Usarov M.K. Bimoment theory construction to assess the stress state of thick orthotropic plates. IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. 614. 2020. 012090. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/614/1/012090>.
- [14] Khusainov R.B. Seismodynamics of Underground Pipelines during Visco-Elastic-Plastic Interaction with Soil // International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology. (www.ijarset.com) of IJARSET, India, Vol. 7. Issue 1. January 2020. P. 12468–12474.
- [15] Султанов К.С. Волновая теория сейсмостойкости подземных сооружений. Ташкент: Фан, 2016. – 392 с.
- [16] O'Rourke M.J., Liu X. Response of Buried Pipelines Subject to Earthquake Effects; Monograph Series; Multidisciplinary Center for Earthquake Engineering Research (MCEER), A National Center of Excellence in Advanced Technology Applications: Buffalo, NY, USA, 1999. –249 p.
- [17] Хусаинов Р.Б. Продольная волна деформации в подземном трубопроводе при вязкоупругом взаимодействии с грунтом // Журнал ОФМГ. М., 2019. №6. С. 19–23.
- [18] Khusainov R.B. Longitudinal Deformation Wave in Buried Pipeline Subject to Viscoelastic Interaction with Soil// Soil Mechanics and Foundation Engineering, Springer 56. 2020. P 420–426.

- [19] Хусаинов Р.Б. Поведение подземного магистрального трубопровода при воздействии бегущего импульса в форме треугольника // Журнал «Проблемы вычислительной и прикладной математики». Ташкент, 2020. №1. С. 50–58.
- [20] Хусаинов Р.Б. О необходимости учёта волнового уноса энергии в задачах расчёта подземных магистральных трубопроводов // Узбекский журнал «Проблемы механики». Ташкент, 2018. №4. С.107–111.
- [21] Хусаинов Р.Б. Оценка влияния силы инерции на продольные колебания подземных трубопроводов // Узбекский журнал «Проблемы механики». Ташкент, 2017. №4. С. 72–75.
- [22] Хусаинов Р.Б. Анализ продольных колебаний подземного трубопровода при упругом и вязкоупругом взаимодействиях с грунтом при различных граничных условиях // Узбекский журнал «Проблемы механики», Ташкент, 2017. №1. С. 86–90
- [23] Rakhmankulova Barno, Mirzaev Sayibdjan, Khusainov Rakhmatjon, Khusainov Saparboy. Underground main pipeline behavior under a travelling impulse in the form of a triangle // International Scientific Conference “Construction Mechanics, Hydraulics and Water Resources Engineering” (CONMECHYDRO - 2021). E3S Web Conf. Volume 264, 2021. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202126401006>.
- [24] Rakhmankulova Barno, Mirzaev Sayibdjan, Aynakulov Sharafidin, Khusainov Rakhmatjon, Khusainov Saparboy, Inertia force effect on longitudinal vibrations of underground pipelines // International Scientific Conference “Construction Mechanics, Hydraulics and Water Resources Engineering” (CONMECHYDRO - 2021). E3S Web Conf. Vol. 264, 2021. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202126401007>.
- [25] Хусаинов Р.Б., Хусаинов С.Б. Численное решение задачи продольного колебания подземного трубопровода методом конечных разностей // Журнал «Проблемы вычислительной и прикладной математики». 2021. №. 2(32). С. 58–69.
- [26] Ильюшин А.А., Рашидов Т.Р. О действии сейсмической волны на подземный трубопровод // Изв. АН Уз. Серия техн. наук. Ташкент, 1971. №1. С. 37–42.

Дата поступления
12.01.2022

Хусаинов Р.Б. Ер ости қувурининг грунт билан чизиқсиз ўзаро таъсиридаги тебраниши

Аннотация: “Қувур–грунт” тизимининг қовушқоқ–эластик–пластик ўзаро таъсирида ер ости қувурининг бўйлама тебраниши масаласи ечими келтирилган. Грунтга сейсмик таъсир, ҳаракатланувчи синус тўлқини кўринишида қабул қилинган. Тажрибалар ёрдамида аниқланган маълумотлардан фойдаланиб, қуруқ ишқаланиш модели асосида чизиқсиз масала ечилган. Масала қувур четлари эркин ва маҳкамланган ҳолларда ҳисобланган. Ер ости қувурининг грунт билан чизиқли ва чизиқсиз ўзаро таъсирларида ҚДҲ тадқиқ этилган. Масала, турли хил грунт шароитларида, чекли айирмалар усули ёрдамида ҳисобланган. Ер ости қувурига сейсмик юкланиш таъсирида, қувурнинг максимал кучланишига эга бўладиган ҳавфли нуқталари аниқланган. Олинган натижалар графиклар кўринишида тасвирланган ва натижалар таҳлили билан асосланган. Сейсмик таъсир ҳаракатланувчи синус кўринишида бўлганда, ер ости қувурининг кесимларида ҳосил бўладиган кўчиши ва кучланишларнинг вақт ва координата бўйича ўзгариши қонуниятлари ўрнатилган.

Калим сўзлар: қувур; грунт; ўзаро таъсир; пластиклик; қовушқоқлик; эластиклик; кучланиш; деформация.

Khusainov R.B. Vibrations of underground pipelines under nonlinear interaction with soil

Annotation: The solution of the problem of longitudinal oscillation of an underground pipeline is give, taking into account the viscous-elastic-plastic interaction in the "pipe-soil" system. The seismic impact on the ground is take in the form of a traveling sine wave. Based on the use of data obtained in the experiments, a nonlinear problem is solve for the dry friction model. The problem is solve under free and fixed boundary conditions. The stress-strain state of an underground pipeline has been studie for linear and non-linear interaction with the soil. The problems are solve by the finite difference method, taking into account various soil conditions. Dangerous points of occurrence of maximum stresses under the influence of seismic loads on an underground pipeline are determined. The obtained data are illustrate in the form of graphs and supported by the analysis of the results. Various patterns of change in displacements and stresses in the sections of steel pipelines in time and coordinate under the influence in the form of a traveling sine wave have been establishe.

Key words: pipe; soil; interaction; plasticity; viscosity; elasticity; stress; deformation.

ОЦЕНКА ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В МНОГОСЛОЙНЫХ БАЛОЧНЫХ ПЛИТАХ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Мамасолиев К.¹, Синдаров Ж.¹, Тошматов Э.²

¹Самаркандский государственный архитектурно-строительный институт. Самарканд, Узбекистан

²Национальный исследовательский университет "Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства". Ташкент, Узбекистан

E-mail: g-mamasoliev@mail.ru; sindarovjamshid88@mail.ru; t.elyor85@mail.ru.

Аннотация: В статье разработаны математическая модель и метод для оценки внутренних силовых факторов в многослойных балочных плитах на упругом основании при различных статических нагрузках. Приведен подробный обзор известных работ по оценке напряженно-деформированного состояния и динамического поведения различных конструкций совместно с основанием. Выведена замкнутая система интегро-дифференциальных уравнений, описывающая процесс деформирования многослойных балочных плит на упругом основании. Рассматриваемая задача сводилась с использованием полинома Чебышева к решению бесконечных систем алгебраических уравнений. Установлено для получения решения задачи с необходимой точностью число членов полинома Чебышева. Показана эффективность метода решения задачи на примере тестовых задач.

Ключевые слова: балочные плиты; основание; взаимодействие; полином Чебышева; регулярность; алгебраические системы.

Введение. В настоящее время усилиями многочисленных исследователей создано много различных методов расчета конструкций на деформируемом основании, свойства которого описываются разнообразными физическими моделями. К ним относятся фундаменты зданий, аэродромные и дорожные покрытия, плиты, гидротехнические сооружения, рельсы и шпалы железнодорожных путей и т.д. В большинстве созданных методов внимание уделено анализу взаимосвязи контактирующих элементов конструкций с грунтовым основанием [1–4].

При этом в работах [5–8] рассмотрены различные законы деформирования и структурных разрушений грунтов, а также распространение сейсмических волн и взаимодействие твердых тел с грунтом.

Имеется ряд исследований, в которых анализируется совместная работа конструкции с основанием, т. е.:

- в [9] рассмотрены контактные задачи о вдавлении прямоугольного штампа с плоским основанием в упругое шероховатое полупространство при наличии трения Кулона с неизвестными зонами сцепления и проскальзывания;

- в [10] излагаются постановки и математические методы решения задач гидроупругости трехслойных элементов конструкций;

- в [11–15] приведены различные исследования по оценке прочности и динамики грунтовых плитин как с учетом основания, так и без учета при статических и динамических воздействиях;

- в [16] исследуется взаимодействие нелинейной системы, т.е. грунтового основания и гравитационной опоры. В модели надстройки использована идеальная эластопластическая модель, а для фундамента принята модель Винклера;

- в [17] исследуется поведение конструкции, опирающейся на фундамент при землетрясении. Предполагается, что поверхность грунта и фундамента представляет собой совокупность дискретных нелинейных элементов, состоящих из пружин, точек крепления и элементов зазора;

- в [18] рассматриваются проблемы оценки критического напряжения и деформации в шарнирно-опертой прямоугольной пластинке за пределом упругости и оценки устойчивости изогнутой пластинки.

Наряду с этим имеется ряд работ, посвящённых динамике, где работа сооружений рассматривается совместно с основанием использования искусственных граничных условий на границе конечной области оснований, т.е.:

- в [19] рассмотрено решение плоской задачи о распространении волн от штампа, расположенного на поверхности полупространства;

- в [20] рассматривается задача об осесимметричных колебаниях гибкого кольца, лежащего на вязкоупругом слоистом основании. Анализируются демпфирующие свойства системы при различных частотах возбуждения;

- в [21] решается линейная задача о взаимодействии поверхностной волны Рэлея, распространяющейся в песчаной среде, с жестким частично заглубленным в грунт сооружением;

- в [22] рассматриваются колебания, напряженное состояние и устойчивость оснований фундаментов под машинами с учетом грунтового основания;

- в [23] оценено динамическое поведение конкретных грунтовых плотин совместно с основанием.

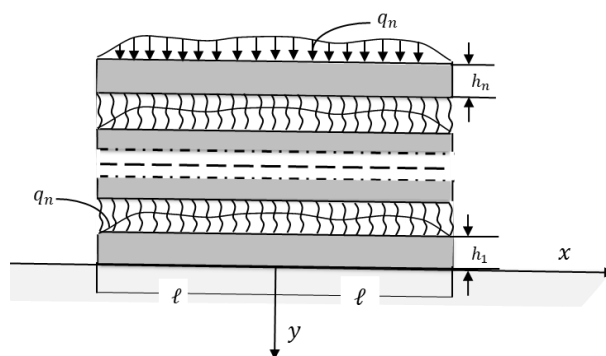
В работе [4–27] рассмотрено взаимодействие многослойных плит-полос с упругим полупространством. Задача сведена к исследованию бесконечных систем алгебраических уравнений. С помощью решения бесконечных систем изучены силовые факторы конструкции.

Поэтому разработка математических модели и методики для оценки напряженно-деформированного состояния многослойных балочных плит, лежащих на упругом основании с учетом их геометрических и физических особенностей, является актуальной задачей.

В настоящей статье для описания процесса деформирования многослойных балочных плит на упругом основании выведена замкнутая система интегродифференциальных уравнений. Решение рассмотренных задач осуществляется разложением в ряд реактивного давления основания по ортогональным полиномам и сведением к исследованию бесконечных систем алгебраических уравнений. Для показания эффективности методики решен ряд тестовых задач.

Математические модели задачи.

Рассматривается процесс моделирования деформирования n слойных балочных плит длиной $2l$, толщиной h_1, h_2, \dots, h_n и шириной, равной единице (рисунок). Каждый слой плиты загружен внешними нагрузками соответственно q_1, q_2, \dots, q_n , произвольными вдоль плиты. Предполагаем, что между плитами расположен упругий наполнитель, а реакцией наполнителя были пропорционально равные разности прогибов, связывающих плиты на нижнюю плиту, плотно прилегающую к основанию, кроме внешних нагрузок и реакции наполнителя вышестоящих плит, влияют и реактивные реакции основания.



Процесс моделирования

Установление начала координаты в симметричном центре балочных плит с абсциссой на отрезке $[-l; l]$, т.е. $-l \leq x \leq l$, позволяет рассмотреть прогибы плиты y_1, y_2, \dots, y_n как функцию от переменной x , т.е. $y_i = y_i(x), i = 1, 2, \dots, n$. Здесь y_i – прогиб i -ой балочной плиты.

Для моделирования процесса деформирования n -слойных балочных плит можно написать систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных прогибов балочных плит в виде

$$\int_{-1}^1 \ln|x-s| \cdot (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} T_k(s) ds = \begin{cases} \pi \ln 2, & \text{при } k=0 \\ -\frac{\pi}{k} T_k(x), & \text{при } k=1,2,3,\dots, \end{cases}$$

для осадки основания получим:

$$V(x) = \frac{2(1-\nu_0^2)l}{E_0} \left[-A_0 \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \frac{T_n(x)}{n} \right]. \quad (7)$$

Если остальные коэффициенты ряда (4) предположим равными нулю, то будем иметь случай абсолютно жесткой балочной плиты. Членами ряда (4) со значением $n=2$ выражена поправка, отличающая распределение реактивного давления для абсолютно жестких балочных плит.

Для простоты рассмотрим двухслойную балочную плиту, взаимодействующую с однородным упругим основанием. Тогда система дифференциальных уравнений для прогибов балочных плит (1) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{D_2}{l^4} \cdot y_2^{IV} &= q_2 - k_1 \cdot (y_2 - y_1) \\ \frac{D_1}{l^4} \cdot y_2^{IV} &= q_1 + k_1 \cdot (y_2 - y_1) - p \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений (8) с учетом (4) представляются в следующем виде:

$$y_1 = \frac{l^4}{D_1 + D_2} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^4 C_i x^{4-i} + f_q(x) - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot f_n(x) - \right. \\ \left. - D_2 \cdot \left[\sum_{i=1}^4 B_i \cdot u_i(\alpha x) + \psi_q(x) + \frac{1}{D_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \varphi_n(x) \right] \right\}, \quad (9)$$

$$y_2 = \frac{l^4}{D_1 + D_2} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^4 C_i x^{4-i} + f_q(x) - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot f_n(x) + \right. \\ \left. + D_1 \cdot \left[\sum_{i=1}^4 B_i \cdot u_i(\alpha x) + \psi_q(x) + \frac{1}{D_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \varphi_n(x) \right] \right\}, \quad (10)$$

где C_i, B_i – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий рассматриваемой задачи;

$$\left. \begin{aligned} u_1(x) &= chx \cdot \cos x; & u_2(x) &= chx \cdot \sin x + shx \cdot \cos x; \\ u_3(x) &= shx \cdot \sin x; & u_4(x) &= chx \cdot \sin x - shx \cdot \cos x \end{aligned} \right\},$$

$$f_q^{IV}(x) = q_1(x) + q_2(x), \quad (11)$$

$$\psi_q(x) = \frac{1}{4\alpha^3} \int_0^x \left[\frac{q_1(z)}{D_2} - \frac{q_2(z)}{D_1} \right] \cdot u_4[\alpha(x-z)] dz, \quad (12)$$

$$f_n^{IV}(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot T_n(x), \quad (13)$$

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{4\alpha^3} \int_0^x u_4[\alpha(x-z)] (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} T_n(z) dz, \quad (14)$$

$$f_n(x) = \frac{1}{2^4 n(n-1)(n-2)(n-3)} (1-x^2)^{7/2} \cdot P_{n-4}^{(7/2, 7/2)}(x), \quad n > 3, \quad (15)$$

$$f_n'(x) = -\frac{1}{2^3 n(n-1)(n-2)} (1-x^2)^{5/2} \cdot P_{n-3}^{(5/2, 5/2)}(x), \quad n > 2, \quad (16)$$

$$f_n''(x) = \frac{1}{2^2 n(n-1)} (1-x^2)^{3/2} \cdot P_{n-2}^{(3/2, 3/2)}(x), \quad n > 1, \quad (17)$$

$$f_n'''(x) = -\frac{1}{2n} (1-x^2)^{1/2} \cdot P_{n-1}^{(1/2, 1/2)}(x), \quad n > 0. \quad (18)$$

Здесь $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ – полиномы Якоби [24].

Используя явный вид

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x) \quad (19)$$

полиномов Чебышева, также можно получать явный вид для функции $f_n(x)$ при $n < 4$.

Формулы (9) и (10), определяющие прогибы балочных плит, имеют общий характер, т.е. для произвольных жесткостей плит и соответствующих произвольных закона распределения внешних нагрузок.

В конкретных законах распределения внешних нагрузок можно найти прогибы балочных плит, соответственно удовлетворяющие граничным условиям. При этом постоянные интегрирования B_i , C_i определяются из граничных условий задач. Коэффициенты A_n в формулах (9), (10) и (7), определяющие прогиб плит и осадки основания, являются неизвестными. Для определения неизвестных коэффициентов A_n используются условия контакта (3). Прогиб нижней балочной плиты, удовлетворяющий граничным условиям (9), и осадки основания (7) подставляются в условия контакта (3). Далее полученное равенство умножается на $(1-x^2)^{-1/2} T_k(x)$ и затем интегрируется в пределах от -1 до 1 . После интегрирования можно получить бесконечную систему алгебраических уравнений с бесконечными неизвестными относительно неизвестных коэффициентов A_n . Эта бесконечная система алгебраических уравнений решается методом редукции. Применение метода редукции строго математически обоснуется. Определенные коэффициенты A_n подставляются в (4), (7), (9), (10) и находятся закономерности реактивных давлений, осадок оснований и прогибов балочных плит. Найденные далее прогибы балочных плит позволяют определить закономерности изменения внутренних усилий плит, соответствующие изменению внешних нагрузок, коэффициента жесткости заполнителя и реакции основания.

Задача 1. Для иллюстрации эффективности вышеуказанной методики рассмотрим задачу оценки прогиба двухслойной балочной плиты, нагруженной равномерно распределенными внешними нагрузками, т.е.

$$q_1(x) = q_2(x) = q = \text{const}.$$

В этом случае из-за симметричности нагрузки ряд (4) будет включать только чётные полиномы

$$p(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \cdot T_{2n}(x). \quad (20)$$

Из уравнения равновесия (5) имеем

$$A_0 = 4q \cdot \pi^{-1}. \quad (21)$$

Выражение (3), описывающее осадки основания, примет вид

$$V(x) = \frac{2l(1-\nu_0^2)}{E_0} \left[-A_0 \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \cdot \frac{T_{2n}(x)}{2n} \right]. \quad (22)$$

Выражения (11), (12) соответственно примут вид

$$f_q(x) = 2q \cdot \frac{x^4}{24}. \quad (23)$$

$$\psi_q(x) = \frac{1}{4\alpha^3} \cdot \frac{D_1 - D_2}{D_1 \cdot D_2} \cdot q \cdot \frac{1}{\alpha} [1 - u_1(\alpha x)]. \quad (24)$$

Удовлетворяя граничные условия и переходя относительными прогибами плит, по формулам

$$\bar{y}_1(x) = y_1(x) - y_1(o), \quad \bar{y}_2(x) = y_2(x) - y_2(o)$$

получаем следующие выражения для определения прогибов плит:

$$\bar{y}_1 = \frac{l^4}{D_1 + D_2} \cdot \left\{ q \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{x^4}{24} \right) - \frac{D_2}{D_1} \cdot \sum A_{2n} \cdot \left[\bar{\varphi}_{2n} \cdot (u_1(\alpha x) - 1) + \bar{\bar{\varphi}}_{2n} \cdot u_3(\alpha x) + \varphi_{2n}(x) + \frac{D_1}{D_2} \cdot (f_{2n}(x) - f_{2n}(0)) \right] \right\}. \quad (25)$$

$$\bar{y}_2 = \frac{l^4}{D_1 + D_2} \cdot \left\{ q \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{x^4}{24} \right) + \sum A_{2n} \cdot \left[\bar{\varphi}_{2n} \cdot (u_1(\alpha x) - 1) + \bar{\bar{\varphi}}_{2n} \cdot u_3(\alpha x) + \varphi_{2n}(x) - (f_{2n}(x) - f_{2n}(0)) \right] \right\}. \quad (26)$$

Здесь

$$\bar{\varphi}_{2n} = \frac{b^{-1}}{8\alpha^3} \cdot \int_0^1 \left\{ 2u_1(\alpha) \cdot u_1[\alpha(1-z)] + u_4(\alpha) \cdot u_2[\alpha(1-z)] \right\} \cdot (1-z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot T_{2n}(z) dz, \quad (27)$$

$$\bar{\bar{\varphi}}_{2n} = \frac{b^{-1}}{8\alpha^3} \cdot \int_0^1 \left\{ 2u_3(\alpha) \cdot u_1[\alpha(1-z)] - u_2(\alpha) \cdot u_2[\alpha(1-z)] \right\} \cdot (1-z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot T_{2n}(z) dz, \quad (28)$$

$$b = u_1(\alpha) \cdot u_2(\alpha) + u_3(\alpha) \cdot u_4(\alpha).$$

Далее подставляются выражения (22) и (25) в (3), затем полученное равенство умножается на

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot T_{2k}(x), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

и интегрируется в пределах от -1 до 1. Учитывая ортогональности полиномов Чебышева, получим следующую бесконечную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_{2n} :

$$a_{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n,2k} \cdot A_{2n} = A_{2k} \cdot \frac{2l \cdot (1-\nu_0^2)}{E_0} \cdot \frac{\pi}{2k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (29)$$

где

$$a_{2k} = \frac{l^4}{D_1 + D_2} \cdot \int_{-1}^1 \left\{ q \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{x^4}{24} \right) - \frac{D_2}{D_1} A_0 \cdot \left[\bar{\varphi}_0 \cdot (u_1(\alpha x) - 1) + \bar{\bar{\varphi}}_0 \cdot u_3(\alpha x) + \varphi_0(x) + \frac{D_1}{D_2} (f_0(x) - f_0(0)) \right] \right\} \cdot (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot T_{2k}(x) dx, \quad (30)$$

$$a_{2n,2k} = -\frac{l^4}{D_1 + D_2} \cdot \frac{D_2}{D_1} \cdot \int_{-1}^1 \left\{ \bar{\varphi}_{2n} \cdot [u_1(\alpha x) - 1] + \bar{\varphi}_{2n} \cdot u_3(\alpha x) + \right. \\ \left. + \varphi_{2n}(x) + \frac{D_1}{D_2} \cdot [f_{2n}(x) - f_{2n}(0)] \right\} \cdot (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot T_{2k}(x) dx \quad (31)$$

Для исключения сингулярности интегралов (30) и (31), интегрируя по частям, их можно привести к следующему виду:

$$a_{2k} = \frac{l^4}{D_1 + D_2} \cdot \int_{-1}^1 \left\{ q \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2} \right) - A_0 \cdot \frac{D_2}{D_1} \cdot [\bar{\varphi}_0 \cdot u_1''(\alpha x) + \right. \\ \left. + \bar{\varphi}_0 \cdot u_3''(\alpha x) + \varphi_0''(x) + \frac{D_1}{D_2} \cdot f_0''(x) \right\} \cdot \alpha_{2k} \cdot (1-x^2)^{3/2} \cdot P_{2k-2}^{(3/2, 3/2)}(x) dx \quad (32)$$

$$a_{2n,2k} = -\frac{l^4}{D_1 + D_2} \cdot \frac{D_2}{D_1} \cdot \int_{-1}^1 \left\{ \bar{\varphi}_{2n} \cdot u_1''(\alpha x) + \bar{\varphi}_{2n} \cdot u_3''(\alpha x) + \right. \\ \left. + \varphi_{2n}''(x) + \frac{D_1}{D_2} \cdot f_{2n}(x) \right\} \cdot \alpha_{2k} \cdot (1-x^2)^{3/2} \cdot P_{2k-2}^{(3/2, 3/2)}(x) dx \quad (33)$$

где

$$\alpha_{2k} = \frac{1}{2k \cdot (2k-1)} \cdot \frac{2^{4k} \cdot [(2k)!]^2}{(4k)!} \quad (34)$$

Полученные формулы (32) и (33) удобны и позволяют получить точные значения интегралов.

Таким образом, рассматриваемая задача сведена к исследованию бесконечных систем алгебраических уравнений (29). Приведенная система алгебраических уравнений (29) является регулярной. Известно, что регулярные бесконечные системы алгебраических уравнений имеют единственное ограниченное решение. Регулярные бесконечные системы алгебраических уравнений (29) можно решать методами редукции.

Задача 2. Рассмотрим численный пример по решению системы (29) и определению изгибающего момента двухслойных балочных плит с помощью изложенной методики. При этом используем следующие характеристики грунта и основания [26]:

$$\nu_0 = 0.3 \quad E_0 = 5 \cdot 10^2 \text{ кгс/см}^2$$

и плит

$$l = 500 \text{ см}, \quad h_1 = h_2 = 45 \text{ см}, \quad \nu_1 = \nu_2 = 0.167, \quad E_1 = E_2 = 1.25 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2.$$

На основе метода редукции ограничиваем первые четыре члена в ряду (20). Тогда система бесконечных уравнений (29) превратится в систему трех уравнений с тремя неизвестными коэффициентами A_2, A_4, A_6 . Коэффициент A_0 считается известным и его значения вычисляются по формуле (21). Численные значения коэффициентов A_0, A_2, A_4, A_6 при разных значениях коэффициента заполнителя k приведены в табл. 1, согласно которой установлено, что изменения значения коэффициентов заполнителя существенно не влияют на изменение решения системы (29), а также реактивного давления основания, определяемого формулой (20). В табл. 2 приводятся величины изгибающего момента в сечении $x=0$ балки полосы при различных значениях коэффициента заполнителя k . По табл. 2 можно считать, что жесткость заполнителя существенно влияет на изменение изгибающих моментов ба-

лочных плит. При значении жесткости заполнителя $k=0.25$ кг/см² изгибающий момент верхней плиты приблизительно на 34 % меньше, чем изгибающий момент нижней плиты. С увеличением показателя жесткостей заполнителя значения изгибающих моментов в нижней плите снижаются, а в верхней увеличиваются, т.е. изгибающие моменты плит приближаются друг к другу.

Таблица 1

Численные значения неизвестных коэффициентов

$k, \text{ кг/см}^3$	A_0/q	A_2/q	A_4/q	A_6/q
0.25	1.273239	-0.299585	-0.003142	0.000273
1.00	1.273239	-0.300361	-0.003195	0.000270
2.5	1.273239	-0.300584	-0.003174	0.000267
10.0	1.273239	-0.300619	-0.003209	0.000269
25	1.273239	-0.300971	-0.003214	0.000262

Таблица 2

Величины изгибающего момента

$k, \text{ кг/см}^3$	Наибольшее изгибающие моменты плит при $x=0$	
	$M_1(x)/(ql^2)$	$M_2(x)/(ql^2)$
0.25	0.103563	0.069591
1.00	0.098766	0.074678
2.5	0.087723	0.085346
10.0	0.087133	0.082961
25	0.086412	0.086095

Полученные результаты показывают эффективность методики при определении внутренних силовых факторов в многослойной пластине-балке.

Заключение.

1. Разработана математическая модель для оценки внутренних силовых факторов многослойных балочных плит на упругом основании при различных статических нагрузках.
2. Для оценки внутренних силовых факторов многослойных балочных плит предложен аналитический метод решения задачи, основанный на ортогональных полиномах.
3. Эффективность метода решения задачи показана на примере решения тестовых задач.
4. Установлено, что учет жесткостных характеристик заполнителя приводит к перераспределению внутренних усилий в плитах.

Литература

- [1] Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов разрезов тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. –32 с.
- [2] Ширинкулов Т. Ш., Зарецкий Ю.К. Ползучесть и консолидация грунтов. Ташкент: Фан, 1986. –390 с.
- [3] Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И. Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат, 1984. – 679 с.
- [4] Клейн Г.К. Учет неоднородности, разрывности деформаций и других механических свойств грунта при расчете сооружения на сплошном основании // Тр. Моск.инж. - строит. ин-та. 1956. № 14.
- [5] Sultanov K.S. Regularities of interaction of underground construction with the ground // Prikladnaya Mekhanika. 1993. 29(3). P. 60–67.
- [6] Sultanov K.S. The attenuation of longitudinal waves in non-linear viscoelastic media // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2002. 66(1). P.115–122.
- [7] Bakhodirov A.A., Ismailova S.I., Sultanov K.S. Dynamic deformation of the contact layer when there is shear interaction between a body and the soil // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2015. 79(6). P.587–595.
- [8] Sultanov K.S., Bakhodirov A.A. Laws of Shear Interaction at Contact Surfaces Between Solid Bodies and Soil // Soil Mechanics and Foundation Engineering. 2016. 53(2). P. 71–77.
- [9] Александров А.И., Грабко Е.В. Решение контактной задачи о вдавлении прямоугольного штампа в упругое шероховатое полупространство при наличии Кулонова трения // Вестник. Сам. гос. тен. ун-та. Сер. Физ.-мат. наук. Вып. 4(37). 2014. С. 42–52.
- [10] Могилевич Л.И., Попов В.С., Христофорова А.В. Математические вопросы гидроупругости трехслойных элементов конструкций. Монография. Саратов, 2012.

- [11] *Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Sadullaev A.* Determination of the stress-strain state of earth dams with account of elastic-plastic and moist properties of soil and large strain // Magazine of Civil Engineering. 2013. 40 (5). P. 59–68. DOI: 10.5862/MCE.40.7.
- [12] *Mirsaidov M.M., Toshmatov E.S.* Spatial stress state and dynamic characteristics of earth dams. Magazine of Civil Engineering. Vol. 89. Iss. 5. 2019. P. 3–15. DOI: 10.18720/MCE.89.1.
- [13] *Mirsaidov M.M.* An account of the foundation in assessment of earth structure dynamics // E3S Web of Conferences. Vol. 97. 2019. 04015. DOI: 10.1051/e3sconf/20199704015.
- [14] *Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Rumi D.F.* An assessment of dynamic behavior of the system "structure - Foundation" with account of wave removal of energy // Magazine of Civil Engineering. Vol. 39. 2013. Iss. 4. P. 94–105. DOI: 10.5862/MCE.39.10.
- [15] *Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z.* Assessment of stress-strain state of earth dams with allowance for non-linear strain of material and large // Magazine of Civil Engineering. Vol. 49. 2014. Iss.5. P.73–82, 136, 137.
- [16] *Weijun Yang, Qiusheng Li.* Nonlinear Dynamic Analysis of Foundation Soil and the Gravity Pier. Applied Mechanics and Materials. Vol. 204–208. 2012. P. 192–195.
- [17] *Raychowdhury Prishati.* Nonlinear Winkler-based shallow foundation model for performance assessment of seismically loaded structures: PhD dissertation. UNIVERSITY OF CALIFORNIA, SAN DIEGO. 2008. P.294.
- [18] *Ismayilov Kubaymurad.* Critical Stresses and deformations in a hinged-supported rectangular plate beyond the elastic limit // European Journal Technical and Natural Sciences, Scientific journal. 2018. №3, P. 32–35.
- [19] *Туров В.П.* К вопросу о сведении задачи о распространении упругих волн в бесконечной области к задаче для конечных размеров // Сопротивление материалов и теория сооружений. Вып. 28. Киев. 1976. С. 186–191.
- [20] *El-Shafee O.M., Could P.L.* Dinamic axisymmetric soil model for a flexible rihg footing // Earthquake Ehg. and Struct. Dyn. Vol. 8. 1980. № 5. P. 419–491.
- [21] *Fedock Joseph, Schreyer Hovard.* Effect of earth Media on the Seismic Motion of Embedded Rigid Structures // Earthquak Ehg. and Struct. Dyn., Vol. 9. 1981. №4. P. 311–327.
- [22] *Красников Н.Д., Савинов Щ.Ф., Толкачев Г.С., Эйчлер Л.А.* Экспериментально-расчетный метод исследований колебаний, напряженного состояния и устойчивости оснований фундаментов под машины // Изв. Вузов. Строительство. 1981. № 5. С. 7–21.
- [23] *Meen-Wah Gui, Hsien-Te Chiu.* Seismic response of Renyitan earth-fill dam // Journal of GeoEngineering. Vol. 4. 2009. № 2. P. 41–50.
- [24] *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физико-математическая литература, 1962. –500с.
- [25] *Абрамовица М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. –832с.
- [26] *Ширинкулов Т. Ш.* Методы расчета конструкций на сплошном основании с учетом ползучести. Ташкент: Фан, 1969.
- [27] *Mirsaidov M.M., Mamasoliev Q.* Contact problems of slabs interaction on an elastic foundation / ICECAE 2020. IOP Conf. Ser: Earth Environ. Sci. 2020, 614012089. Doi:10.1088/1755-1315/614/1/012089.

Дата поступления

21.12.2021 г.

Мамасолиев К., Синдаров Ж., Тошматов Э. Эластик асосдаги кўп қатламли тўсин плитасини ички куч факторларини баҳолаш

Аннотация: Мақолада Эластик асосдаги кўп қатламли тўсин плитасини турли статик юкламаларда ички куч факторларини баҳолашнинг математик модели ва услуги ишлаб чиқилган. Турли конструкцияларни асос билан биргаликда динамик ҳолатини ва кучланганлик-деформацияланганлик ҳолатини баҳолаш бўйича мавжуд ишлар тўлиқ таҳлил қилинган. Эластик асосдаги кўп қатламли тўсин плитасини деформацияланиш жараёнини тавсифловчи ёпиқ интегродифференциал тенгламалар системаси қурилган. Қўрилаган масала Чебишев полиномидан фойдаланиб чексиз алгебраик тенгламалар системасини ечимга олиб келинган. Масала ечимини олиш учун Чебишев полиноми хадлари сонининг керакли аниқлиги ўрнатилган. Масаланинг ечиш услубининг эффекивлиги тест масалаларда кўрсатилган.

Калит сўзлар: тўсин плитаси, асос, ўзаро таъсир, Чебишев полиноми, алгебраик система.

Mamasoliev K., Sindarov J., Toshmatov E. Estimation of internal force factors in multi-layer beam slabs on an elastic foundation

Abstract: A mathematical model and method for assessing the internal force factors in multilayer beam slabs on an elastic foundation under various static loads are developpe in the article. A detailed review of well-known publications on assessing the stress-strain state and dynamic behavior of various structures together with the foundation is given. A closed system of integral-differential equations describing the process of deformation of multilayer beam slabs on an elastic foundation is derive. The problem under consideration was reduce using the Chebyshev polynomial to the solution of infinite systems of algebraic equations. The number of terms of the Chebyshev polynomial was establishe to obtain a solution to the problem with the required accuracy. The efficiency of the method for solving the problem is show in the example of test problems.

Keywords: beam slabs; foundation; interaction; Chebyshev polynomial; regularity; algebraic systems.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ ВНЕЗАПНО РАСШИРЯЮЩЕМСЯ КАНАЛЕ НА ОСНОВЕ НОВОЙ ДВУХЖИДКОСТНОЙ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ И МОДЕЛИ УИЛКОКСА

Маликов З.М.¹, Назаров Ф.Х.¹, Омонов З.Ж.², Абдухамидов С.К.¹

¹Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М.Т.Уразбаева АН РУз. Ташкент, Узбекистан

²Ташкентский государственный технический университет имени Ислама Каримова. Ташкент, Узбекистан
E-mail: malikov.z62@mail.ru

Аннотация: В статье представлены результаты численного исследования структуры течения в плоском канале в зоне его внезапного расширения. Расчеты выполнены на основе новой двухжидкостной модели турбулентности и модели турбулентности Уилкокса. Стационарное решение задачи получено методом установления, для чего использовались нестационарные уравнения гидродинамики. В работе исследованы поля скоростей и давления, изучены скорость и турбулентные напряжения потока, а также коэффициент сопротивления на различных участках канала. Основные расчеты выполнены на равномерной сетке с числом узлов 300×90 . Для разностной аппроксимации исходных уравнений применен метод контрольного объема второго порядка по пространству. Корректность результатов подтверждена для чисел Рейнольдса $Re = 36000$ путем сравнения с найденными в литературе экспериментальными данными.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса; плоский канал с обратным уступом; отрывное течение; двухжидкостная модель; метод контрольного объема; турбулентные напряжения.

Введение. Исследование отрывных течений имеет важное значение как с фундаментальной, так и прикладной точек зрения. Классическим примером для отрывных течений является поток в канале с внезапным расширением. Фрагменты течения жидкости во внезапно расширяющихся каналах встречаются в различных технических устройствах и сооружениях. Резкое изменение геометрии стенки канала или поверхности обтекаемого тела способно вызвать отрыв потока и существенно изменить его кинематическую структуру. Примером подобного течения является движение несжимаемой вязкой жидкости в плоском канале с обратным уступом, в котором присутствуют как отрыв потока на кромке уступа с его последующим присоединением вниз по течению к нижней стенке канала, так и зона рециркуляции жидкости сразу же за уступом. Причем в зависимости от соотношения инерции течения и вязких сил таких зон рециркуляции и сопровождающих их точек отрыва и присоединения потока к стенкам канала может быть несколько.

Первые расчеты стационарных двумерных ламинарных отрывных течений несжимаемой жидкости в каналах были получены Блазиусом еще в 1910 г. аналитически в виде рядов [1]. В дальнейшем эта задача использовалась многими исследователями для изучения механизмов отрывных течений и для тестирования разностных схем решения уравнений Навье–Стокса. В силу большой практической значимости такие течения изучались теоретически и экспериментально как для ламинарных [2–4], так и для турбулентных [5–7] режимов движения несжимаемой и сжимаемой жидкости.

В настоящее время очевидно, что при постановке задач расчета отрывных течений с вихревыми образованиями необходимо использовать не приближенные уравнения пограничного слоя, а полные уравнения Навье–Стокса. Хорошо известно, что численное решение задач о движении вязкой несжимаемой жидкости на основе уравнений Навье–Стокса осложнено не только их нелинейностью, но и отсутствием явного уравнения для определения давления. В работе [8] решена похожая задача, где закрученный поток претерпевает внезапное расширение. Для этого была использована новая двухжидкостная модель турбулентности. Для численной реализации уравнений гидродинамики использован метод контрольного объема, а коррекция давления на скорости проведена методом С.В. Патанкара.

Известно, что при больших значениях числа Рейнольдса наступает турбулентный режим течения. Для расчетов такого режима течения необходимо использовать соответствующую модель турбулентности. В настоящее время, в основном, существуют три под-

хода к проблеме турбулентности. В первом подходе используются методы прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation, DNS) [9, 10], а во втором – метод моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES) [11]. В третьем подходе используются уравнения Навье–Стокса осредненные по Рейнольдсу (Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations, RANS). Эта система уравнений является незамкнутой и для ее замыкания используются различные модели, которые называются RANS моделями турбулентности. На сегодняшний день в мире существует более 100 различных RANS моделей турбулентности. В базе данных NASA [12] приведен сравнительный анализ различных полуэмпирических моделей.

Цель данной статьи состоит в применении новой двухжидкостной турбулентной модели для решения внутренней задачи гидродинамики о течении жидкости в плоском канале с внезапным односторонним расширением и сравнении численных результатов с экспериментальными данными из базы данных NASA [12], а также сравнения с результатами широко известной модели Уилкокса.

Физическая и математическая постановка задачи. Рассматривается двумерное турбулентное течение в плоском канале с внезапным расширением в виде уступа. Физическая картина анализируемого течения и конфигурация расчетной области представлены на рис. 1. Данная задача является экспериментально хорошо изученной и введена в базу данных NASA [12].

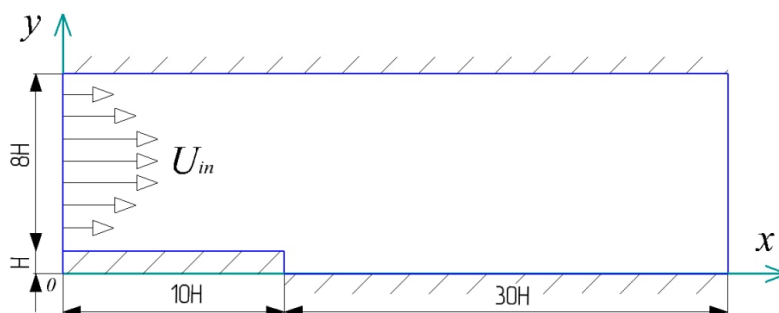


Рис. 1. Схема расчетной области в плоском канале с обратным уступом

Для исследования стационарного движения жидкости в работе использованы новая двухжидкостная модель турбулентности и модель Уилкокса. Для получения стационарного решения поставленной задачи использовался метод установления, для чего рассматривается нестационарная задача, решение которой при достаточно большом времени стремится к стационарному решению. Новая двухжидкостная модель подробно описана в работе [8], а также в общих чертах в [13, 14]. В этих работах показано, что система уравнений для новой двухжидкостной модели турбулентного несжимаемого потока в декартовой системе координат имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial v u}{\partial y} - \frac{\partial u u}{\partial x}, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial v v}{\partial y} - \frac{\partial u v}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} = -(1 - C_s) \frac{\partial U}{\partial y} v + \frac{\partial}{\partial x} \left(2v'_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v'_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) - C_r u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + V \frac{\partial v}{\partial y} = C_s \frac{\partial U}{\partial y} u + \frac{\partial}{\partial x} \left(v'_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2v'_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - C_r v. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь $\nu'_{xx} = 3/\text{Re} + 2 \left| \frac{uu}{\partial U/\partial y} \right|$, $\nu'_{xy} = 3/\text{Re} + 2 \left| \frac{uv}{\partial U/\partial y} \right|$, $\nu'_{yy} = 3/\text{Re} + 2 \left| \frac{vv}{\partial U/\partial y} \right|$, $C_s = 0.2$, $C_r = C_1 \lambda_{\max} + C_2 \frac{|d \cdot V|}{d^2}$.

В приведенных уравнениях U, V – соответственно аксиальная, радиальная составляющие вектора скорости воздушного потока; p – гидростатическое давление; u, v – относительная скорость первой жидкости; ν_t – турбулентная вязкость жидкости; ν – кинематическая вязкость жидкости; $\nu'_{xx}, \nu'_{yy}, \nu'_{xy}$ – эффективные молярные вязкости; d – ближайшее расстояние до твердой стенки.

Уравнения движения двух жидкостей для модели Уилкокса имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\text{Re}} + \nu_t \frac{\partial U}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\text{Re}} + \nu_t \frac{\partial V}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial k}{\partial t} + U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = P - \beta^* \omega k + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \sigma_k \frac{k}{\omega} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right], \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + U \frac{\partial \omega}{\partial x} + V \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\gamma \omega}{k} P - \omega^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \sigma_\omega \frac{k}{\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial y} \right]. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь

$$P = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \tau_{ij} = \nu_t \left(2S_{ij} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \nu_t = \frac{k}{\hat{\omega}},$$

$$\hat{\omega} = \max \left[\omega, C_{\text{lim}} \sqrt{\frac{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}{\beta^*}} \right], \quad \bar{S}_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}.$$

Постоянные коэффициенты для модели Уилкокса равны $C_1=0.7825$, $C_2=0.306$, $\sigma_k=1.0$, $\sigma_\omega=1.3$, $\beta^*=0.09$, $\gamma=13/25$, $C_{\text{lim}}=7/8$.

В качестве начальных условий задавалось течение Пуазейля во всей расчетной области. Для численного расчета на входе задавался экспериментальный профиль скорости, соответствующий расположению входа расчетной области. На стенках ставились условия прилипания. На выходе ставились условия экстраполяции второго порядка точности. Число Рейнольдса было $Re_H=36000$, что соответствовало экспериментальным данным [12].

Метод решения.

Численное решение представленных систем уравнений проводилось в физических переменных скорость – давление путем физического расщепления полей скорости и давления. При этом для уравнений переноса использована шахматная разностная сетка методом контрольного объема. Согласно этому методу, первый этап интегрирования уравнений для новой двухжидкостной модели будет иметь следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{\tilde{U}_{i,j} - U_{i,j}^n}{\Delta t} + U_{i,j}^n \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial x} + V_{i,j}^n \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial y} + \frac{\partial p_{i,j}^n}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}_{i,j}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_{i,j}^n}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial v u}{\partial y} - \frac{\partial u u}{\partial x}, \\
& \frac{\tilde{V}_{i,j} - V_{i,j}^n}{\Delta t} + U_{i,j}^n \frac{\partial V_{i,j}^n}{\partial x} + V_{i,j}^n \frac{\partial V_{i,j}^n}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}_{i,j}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_{i,j}^n}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial v v}{\partial y} - \frac{\partial u v}{\partial x}, \\
& \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + U_{i,j}^n \frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial x} + V_{i,j}^n \frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial y} = -(1 - C_s) \frac{\partial U_{i,j}^{n+1}}{\partial y} v_{i,j}^n + \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial x} \left(2v'_{xx} \frac{\partial u_{i,j}^{n+1}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v'_{xy} \left(\frac{\partial u_{i,j}^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial v_{i,j}^{n+1}}{\partial x} \right) \right) - C_r u_{i,j}^{n+1}, \\
& \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} + U_{i,j}^n \frac{\partial v_{i,j}^n}{\partial x} + V_{i,j}^n \frac{\partial v_{i,j}^n}{\partial y} = C_s \frac{\partial U_{i,j}^{n+1}}{\partial y} u_{i,j}^n + \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial x} \left(v'_{xy} \left(\frac{\partial v_{i,j}^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial u_{i,j}^{n+1}}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2v'_{yy} \frac{\partial v_{i,j}^{n+1}}{\partial y} \right) - C_r v_{i,j}^{n+1}.
\end{aligned} \right. \quad (3)$$

Для модели Уилкокса:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{\tilde{U}_{i,j} - U_{i,j}^n}{\Delta t} + U_{i,j}^n \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial x} + V_{i,j}^n \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial y} + \frac{\partial p_{i,j}^n}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\text{Re}} + v_t \frac{\partial \tilde{U}_{ij}}{\partial y} \right), \\
& \frac{\tilde{V}_{i,j} - V_{i,j}^n}{\Delta t} + U_{i,j}^n \frac{\partial V_{i,j}^n}{\partial x} + V_{i,j}^n \frac{\partial V_{i,j}^n}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \left(\frac{1}{\text{Re}} + v_t \frac{\partial \tilde{V}_{i,j}}{\partial y} \right), \\
& \frac{k_{i,j}^{n+1} - k_{i,j}^n}{\Delta t} + U_{i,j}^n \frac{\partial k_{i,j}^n}{\partial x} + V_{i,j}^n \frac{\partial k_{i,j}^n}{\partial y} = P - \beta^* \omega k + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(v + \sigma_k \frac{k}{\omega} \right) \frac{\partial k_{i,j}^{n+1}}{\partial y} \right], \\
& \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t} + U_{i,j}^n \frac{\partial \omega_{i,j}^n}{\partial x} + V_{i,j}^n \frac{\partial \omega_{i,j}^n}{\partial y} = \frac{\gamma \omega}{k} P - \omega^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(v + \sigma_\omega \frac{k}{\omega} \right) \frac{\partial \omega_{i,j}^{n+1}}{\partial y} \right].
\end{aligned} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& U^{n+1} = \tilde{U} - \Delta t \frac{\partial \delta p}{\partial x}, \\
& V^{n+1} = \tilde{V} - \Delta t \frac{\partial \delta p}{\partial y}.
\end{aligned} \right. \quad (5)$$

В уравнениях (3) и (4) верхний индекс “ \tilde{U} ” обозначает промежуточную сеточную функцию для вектора скорости; $\delta p = p^{n+1} - p^n$ – поправка к давлению. Умножая уравнение (3) на градиент и учитывая соленоидальность вектора скорости на $(n+1)$ -м временном слое, получаем уравнение Пуассона для определения поправки к давлению:

$$\Delta t \left(\frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta p}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y}. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) проводилось методом итераций, для чего уравнение (6) приводилось к параболическому виду

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t_0} - \Delta t \left(\frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta p}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y}, \quad (7)$$

где фиктивное время t_0 является итерационным параметром. При решении уравнения (7) для шага по времени можно записать $\Delta t_0 = a_1 \Delta t$, при этом значение постоянной a_1 , как правило, меньше единицы и выбирается из условия быстрой сходимости численного процесса.

В качестве граничного условия для поправки к давлению используется условие Неймана, которое выполняется в случае, если для \tilde{U} на границе используется точное значение U^{n+1} . Для численного решения уравнения переноса системы (3) и (4) использована конечно-разностная схема против потока для конвективных членов, а диффузионные члены аппроксимировались центральной разностью неявным образом.

Схема против потока имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^n}{\Delta t} + 0.5(U_{i,j} + |U_{i,j}|) \frac{\Phi_{i,j}^n - \Phi_{i-1,j}^n}{\Delta x} + 0.5(U_{i,j} - |U_{i,j}|) \frac{\Phi_{i+1,j}^n - \Phi_{i,j}^n}{\Delta x} + \\ & + 0.5(V_{i,j} + |V_{i,j}|) \frac{\Phi_{i,j}^n - \Phi_{i,j-1}^n}{\Delta y} + 0.5(V_{i,j} - |V_{i,j}|) \frac{\Phi_{i,j+1}^n - \Phi_{i,j}^n}{\Delta y} = \frac{\Phi_{i,j+1}^{n+1} - 2\Phi_{i,j}^{n+1} + \Phi_{i,j-1}^{n+1}}{2\text{Re} \Delta y^2} + \Pi^{(\Phi)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для численного решения уравнения (7) использована полунявная схема, которая эффективно реализуется методом прогонки:

$$\frac{\delta p_{i,j}^{n+1} - \delta p_{i,j}^n}{\Delta t_0} - \left(\frac{\delta p_{i+1,j}^{n+1} - 2\delta p_{i,j}^{n+1} + \delta p_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) - \left(\frac{\delta p_{i,j+1}^{n+1} - 2\delta p_{i,j}^{n+1} + \delta p_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\tilde{U}_{i,j} - \tilde{U}_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{\tilde{V}_{i,j} - \tilde{V}_{i,j-1}}{\Delta y} \right). \quad (9)$$

Таким образом, сначала методом установления решается система уравнений (2), (3), затем уравнение (7) и в соответствии с (5) определяются вектор скорости на $(n+1)$ -м временном слое и давление $p^{n+1} = p^n + \delta p$. Несложно показать, что расчетная схема имеет порядок точности $O(\Delta t, \Delta x, \Delta y^2)$.

Результаты расчетов и их обсуждение. На рис. 2 приведены графики сравнения расчетных и экспериментальных данных, на которых представлены профили продольной скорости U в различных измеренных сечениях на расстояниях от входа в широкий канал.

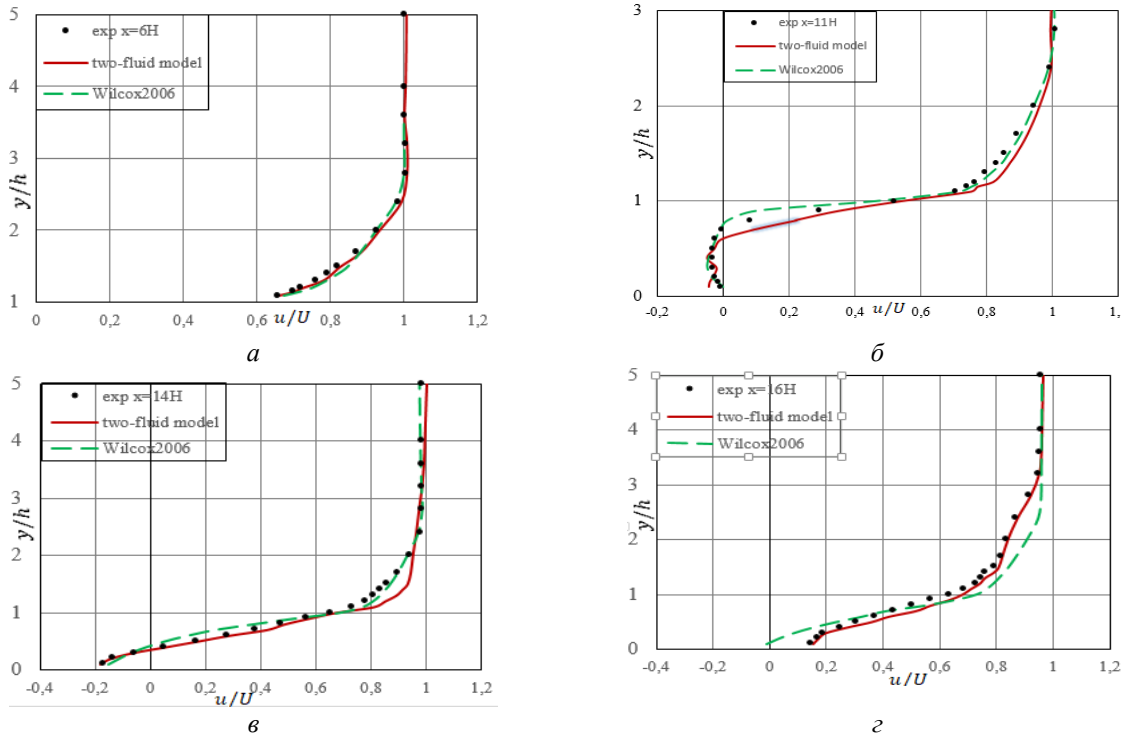


Рис. 2. Профили продольной U скорости в сечениях $x = 6 \text{ H}$ (а), $x = 11 \text{ H}$ (б), $x = 14 \text{ H}$ (в), $x = 16 \text{ H}$ (г)

На рис. 3 представлены профили турбулентного напряжения в различных измеренных сечениях.

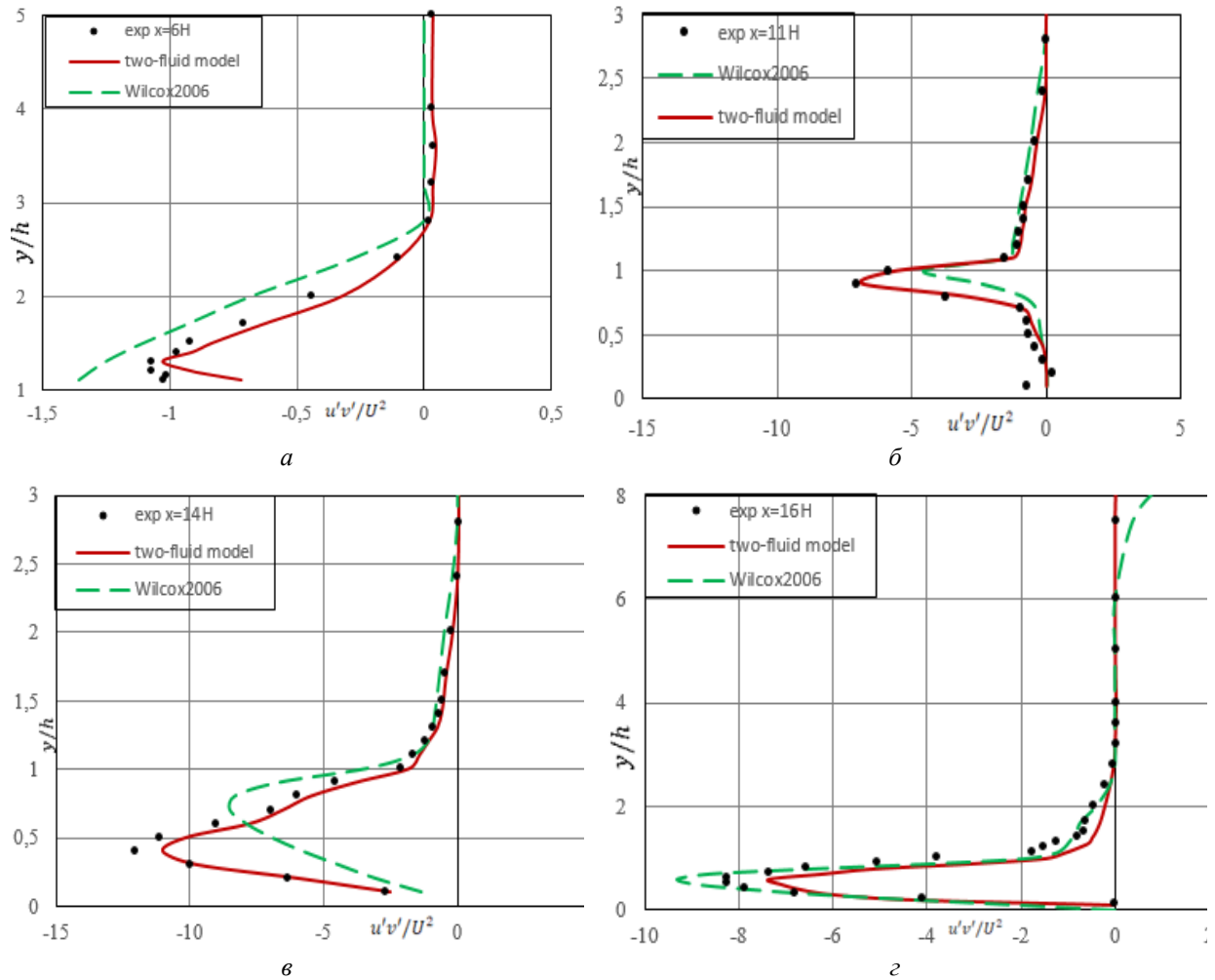


Рис. 3. Профили турбулентного напряжения ($1000 u'v'/U^2$) в сечениях $x = 6 H$ (а), $x = 11 H$ (б), $x = 14 H$ (в), $x = 16 H$ (г)

На рис. 4 приведены распределения коэффициента трения по длине канала.

$$C_f = \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

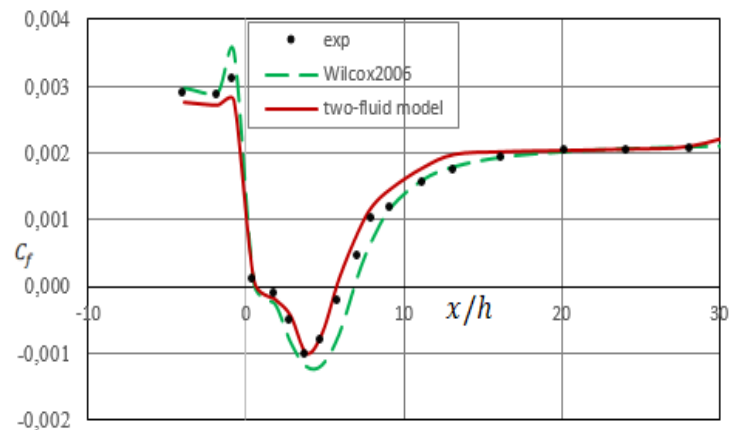


Рис. 4. Распределение коэффициента трения по длине канала

Выводы. В статье представлены численные решения новой двухжидкостной модели турбулентности и модели Уилкокса применительно к задаче течения несжимаемой вязкой

жидкости в коротком плоском канале с обратным уступом. Продемонстрированы изменения скорости, турбулентного напряжения и коэффициента трения. Полученные результаты, несмотря на использования достаточно грубой однородной расчетной сетки, хорошо согласуются между собой и с экспериментальными данными. Численная реализация моделей показала, что устойчивость новой двухжидкостной модели существенно больше, чем устойчивость модели Уилкокса. Например, в модели Уилкокса неустойчивость модели наступала при $\Delta t > 10^{-4}$, а новая двухжидкостная модель сохраняла свою устойчивость даже при $\Delta t > 10^{-3}$. Следовательно, новую двух-жидкостную модель можно рекомендовать для численных исследований отрывных течений в практических задачах.

Литература

- [1] *Blasius H.* Laminare Stromung in Kanalen Wecselnder Briete // Zeitschrift filer Mathematik und Physik. 1910. 10. S. 225.
- [2] *Honji H.* The starting flow down a step // J. Fluid Mech. 1975. 69. Pt. 2. P. 229–240.
- [3] *Синха С. П., Гунта А.К., Оберай М.М.* Ламинарное отрывное обтекание уступов и каверн. Ч 1. Течение за уступом // Ракетная техника и космонавтика. 1981. Т. 19. N 12. С. 33–37.
- [4] *Armaly B.F., Durst F., Pereira J.C.F., Schonung B.* Experimental and theoretical investigation of backward-facing stap flow // J. Fluid Mech. 1983. N. 127. P. 473–496.
- [5] *Чжен П.* Отрывные течения. М.: Мир, 1972-1973. Т.1. – 300 с; Т.2. –280 с; Т.3. – 354 с.
- [6] *Гогини Л.В., Степанов Г.Ю.* Турбулентные отрывные течения. М.: Наука, 1979. – 368 с.
- [7] *Le П., Moin P., Kim J.* Direct numerical simulation of turbulent flow a backward-facing stap // J. Fluid Mech. 1997. №330. P. 349–374.
- [8] *Malikov Z.* Mathematical Model of Turbulence Based on the Dynamics of Two Fluids. Applied Mathematical Modeling, Vol.82. 2020. P.409–436.
- [9] *Versteegh T.A., Nieuwstadt F.T.* Turbulent Budgets of Natural Convection in an Infinite, Differentially Heated, Vertical Channel // Intern. J. Heat Fluid Flow. Vol.19. 1997. P. 135.
- [10] *Boudjemadi R., Maupu V., Laurence D., Le Quere P.* Direct Numerical Simulation of Natural Convection in a Vertical Channel: A Tool for Second-Moment Closure Modelling // Proc. Engineering Turbulence Modelling and Experiments 3. Amsterdam: Elsevier, 1996. P. 39.
- [11] *Peng S.-H., Davidson L.* Large Eddy Simulation of Turbulent Buoyant Flow in a Confined Cavity // Intern. J. Heat Fluid Flow. Vol. 22. 2001. P. 323.
- [12] *Cristopher R.* Responsible NASA official. “Turbulence modeling Resource. NASA Langley Research Center”, <http://turbmodels.larc.nasa.gov>. (дата обращения 04.04.2019).
- [13] *Маликов З.М., Мадалиев М.Э.* Численное моделирование двухфазного потока в центробежном сепараторе // Прикладная математика и механика. М., 2020. Т. 84. № 5. С. 590 – 611.
- [14] *Malikov Z.M., Madaliev M.E.* Numerical Simulation of Two-Phase Flow in a Centrifugal Separator // ISSN 0015-4628, Fluid Dynamics. Vol. 55. 2020. No. 8. P. 1012–1028.

Дата поступления
22.11.2021

Маликов З.М., Назаров Ф.Х., Омонов З.Ж., Абдухамидов С.К. Янги икки суюқлик ва Уилкоккс турбулентлик моделлари асосида тўсатдан кенгайган текис каналдаги оқимини сонли усулда ўрганиши.

Аннотация: Мақолада тўсатдан кенгайиб бораётган текис каналда оқимнинг структурасини сонли ўрганиши натижалари келтирилган. Ҳисоблаш натижалари янги икки суюқлик ва Уилкоккс турбулентлик моделлари асосланган. Муаммонинг стационар ечими гидродинамиканинг ностационар тенгламаларида ўрнатиши усулидан фойдаланилган ҳолда олинган. Ушбу мақолада тезлик ва босим майдонлари, оқимнинг тезлиги ва турбулент кучланишлари, шунингдек каналнинг турли қисмларида қаршилиқ коэффициентини ўрганилади. Асосий ҳисоблашлар тугунлар сони 300×90 бўлган текис тақсимланган тўрда амалга оширилади. Бошланғич шартлар асосида айирмалли апроксимация учун фазода иккинчи тартибли ҳажмий яқинлашув усули қўлланилади. Натижаларнинг корректлиги адабиётда аниқланган, Рейнольдс сони $Re = 36000$ топилган экспериментал маълумотлар билан мазкур ишда сонли натижалар билан таққосланган.

Калит сўзлар: Навье–Стокс тенгламалари, тескари тусиқ текис канал, узилган оқим, икки суюқлик модели, ҳажмий назорат усули, турбулент кучланишлар.

Malikov Z.M., Nazarov F.H., Omonov Z.Zh., Abdukhamidov S.K. Numerical study of the flow in a flat suddenly expanding channel based on a new two-fluid turbulence model and the Wilcox model

Abstract: The article presents the results of a numerical study of the flow structure in a flat channel in the zone of its sudden expansion. The calculations are based on the new two-fluid turbulence model and the Wilcox turbulence model. The stationary solution of the problem was obtained by the method of establishment, for which non-stationary equations of hydrodynamics were used. The velocity and pressure fields are investigated, the velocity and turbulent stresses of the flow are studied as well as the coefficient of resistance in various sections of the channel. The main calculations are performed on a uniform grid with the number of nodes 300×90 . For the difference approximation of the initial equations, the method of the control volume of the second order in space is applied. The correctness of the results was confirmed for the Reynolds numbers $Re = 36000$ by comparison with the experimental data found in the literature.

Keywords: Navier-Stokes equations; flat channel with reverse ledge; separation flow; two-fluid model; control volume method; turbulent stress.

УДК 519.6

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ ПОСЛЕ ВНЕЗАПНОГО РАСШИРЕНИЯ ТРУБ С РАЗЛИЧНЫМИ ДИАМЕТРАМИ

Наврұзов Д.П.

Институт механики и сейсмостойкости сооружений им.М.Т.Уразбаева АН РУз. Ташкент, Узбекистан
E-mail: navruzov.d@mail.ru

Аннотация: В настоящей статье проводится численное исследование резко расширяющегося сильно закрученного потока с помощью моделей v^2 - f на основе пакета программы Comsol Multiphysics 5.6 и двухжидкостной модели турбулентности. Полученные результаты сравниваются с известными экспериментальными данными с различными диаметрами труб. Целью данной статьи является проверка способности моделей описывать анизотропную турбулентность. Обосновывается, что двухжидкостная модель является более подходящей для исследования подобных течений.

Ключевые слова: внезапное расширение; динамика двух жидкостей; вихрь; контрольный объем; молярная вязкость; пакет программы COMSOL.

Введение. Течение после внезапного расширения трубы является одним из часто встречающихся случаев отрывного потока при обтекании острых кромок тел. Процесс отрыва сопровождается значительными изменениями скорости и давления в зоне отрыва. Течение и теплообмен вниз от сечения отсоединения потока зависит от предыстории развития потока и геометрии поверхности в районе сечения отрыва. Внезапное расширение потока в трубах или каналах обычно используется в качестве стабилизатора пламени в камерах сгорания, для интенсификации теплообмена обменных процессов и во многих других технических устройствах. Достаточно часто отрыв – это явление, приводящее к негативным последствиям: увеличению сопротивления газа в трубопроводах, снижению скорости и пр. Наличие рециркуляционного течения в отрывной зоне оказывает значительное влияние на интенсивность процессов переноса импульса, теплоты и массы и определяет структуру турбулентного течения [1]. Достаточно часто в различных технологических приложениях используются двухфазные течения с отрывом. При этом, помимо указанных выше параметров, на процессы переноса большое влияние оказывает дисперсная фаза. Ее воздействие возрастает с ростом диаметра частиц и их концентрации. Цель настоящей статьи – проведение численного исследования распространения дисперсной примеси в турбулентном потоке после внезапного расширения трубы при наличии теплообмена двухфазного потока с поверхностью стенки трубы и сопоставление полученных результатов двухжидкостной модели с результатами пакета программы COMSOL.

Как отмечалось, серьезными тестовыми задачами для моделей турбулентности являются задачи с закрученными потоками. Поэтому в качестве следующей тестовой задачи для верификации новой модели рассмотрим процесс прецессии сильно закрученного потока после внезапного расширения (рис.1). Здесь D_2 изменяется до $D_2 = 2D_1, 5D_1, 10D_1$.

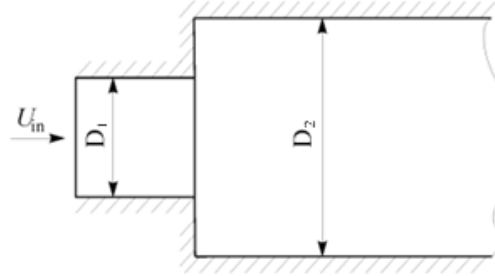


Рис. 1. Труба с внезапным расширением

Математическая модель. Двухжидкостная модель. Рассмотрим математическую модель турбулентности на основе динамики двух жидкостей. Система уравнений для турбулентного потока имеет следующий вид [2]:

$$\begin{cases}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_i}{\partial x_i} = 0, \\
 \frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U_j U_i + \delta_{ij} p)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\Pi_{ij} - \rho v_i v_j), \\
 \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\rho v_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \pi'_{ij}}{\partial x_j} + F_{ri} + F_{\perp i}, \\
 \Pi_{ij} = \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \pi'_{ij} = \rho v'_i v'_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \\
 v'_i v'_j = 3\nu + \left| \frac{v_i v_j}{\text{def}(U)} \right|, F_r = -\rho C_r \nu, F_{\perp} = 2\rho C_s \text{rot} U \times v.
 \end{cases} \quad (1)$$

Необходимо отметить, что π'_{ij} является тензором. Поэтому в правой части для данного тензора суммирование по повторяющимся индексам не производится.

Задачу будем исследовать в цилиндрических координатах. В задаче пренебрегаем продольными производными в диффузионных членах. Тогда система уравнений (1) в цилиндрических координатах будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases}
 \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{\partial r V_r}{r \partial r} = 0, \\
 \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{\partial V_z}{r \partial r} \right) - \frac{\partial r v_r v_z}{r \partial r}, \\
 \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{V_\varphi^2}{r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{\partial V_r}{r \partial r} - \frac{V_r}{r^2} \right) - \frac{\partial r v_r v_r}{r \partial r}, \\
 \frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_r V_\varphi}{r} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial V_\varphi}{r \partial r} - \frac{V_\varphi}{r^2} \right) - \frac{\partial r^2 v_r v_\varphi}{r^2 \partial r}, \\
 \frac{\partial v_z}{\partial t} + V_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + V_r \frac{\partial v_z}{\partial r} = -(1 - 2C_s) \frac{\partial V_z}{\partial r} v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r v'_{zr} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - C_r v_z, \\
 \frac{\partial v_r}{\partial t} + V_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + V_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -2C_s \frac{\partial V_z}{\partial r} v_z - (2C_s \frac{\partial r V_\varphi}{r \partial r} - \frac{2V_\varphi}{r}) v_\varphi + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v'_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r}) - 2v'_{rr} \frac{v_r}{r^2} - C_r v_z, \\
 \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + V_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + V_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} = -(1 - 2C_s) \frac{\partial r V_\varphi}{r \partial r} v_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v'_{\varphi r} (\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r})) - C_r v_\varphi,
 \end{cases} \quad (2)$$

Для определения молярных вязкостей воспользуемся соотношениями

$$v'_{zr} = 3\nu + 2 \left| \frac{v_z v_r}{\text{def}(U)} \right|,$$

$$v'_{rr} = 3v + 2 \left| \frac{v_r v_r}{def(U)} \right|,$$

$$def(U) = \sqrt{\left(\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r}\right)^2}.$$

Решая характеристическое уравнение, найдем максимальный корень

$$\lambda_{\max} = \sqrt{D}, \text{ если } D \geq 0,$$

$$\lambda_{\max} = 0, \text{ если } D \leq 0,$$

где

$$D = 2C_s(1 - 2C_s) \left[\left(\frac{\partial r V_\varphi}{r \partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)^2 \right] - \frac{2(1 - 2C_s)V_\varphi}{r} \frac{\partial r V_\varphi}{r \partial r}.$$

Установлено, что

$$C_r = C_1 \lambda_{\max} + C_2 \frac{|v_r|}{d}.$$

Здесь d – ближайшее расстояние до твердой стенки; C_1, C_2 коэффициенты те же, что и для первой задачи.

v^2 - f модель турбулентности. Около твердых стенок интенсивность флуктуаций скорости в направлении по касательной к стенке обычно намного превышает интенсивность флуктуаций в направлении по нормали к стенке, т.е. флуктуациям скорости свойственна анизотропия. По мере удаления от стенки интенсивность флуктуаций во всех направлениях становится одинаковой. Флуктуации скорости становятся однородными или изотропными. Анизотропия турбулентных флуктуаций в пограничном слое описывается v^2 - f моделью турбулентности за счет введения двух дополнительных уравнений, решаемых совместно с уравнениями для кинетической энергии турбулентности (k) и скорости диссипации кинетической энергии (ε):

$$\begin{cases} (\mathbf{U} \cdot \nabla)k = \nabla \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k}\right) \nabla k \right] + P - \varepsilon, \\ (\mathbf{U} \cdot \nabla)\varepsilon = \nabla \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon}\right) \nabla \varepsilon \right] + \frac{1}{\tau} (C_{\varepsilon 1}(\zeta, \alpha)P_k - C_{\varepsilon 2}(k, \varepsilon, \alpha)\varepsilon), \\ (\mathbf{U} \cdot \nabla)\zeta = \nabla \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_\zeta}\right) \nabla \zeta \right] + \frac{2}{k} \left[\alpha^3 v + \frac{v_t}{\sigma_\zeta} \right] \nabla k \nabla \zeta + (1 - \alpha^3)f_w + \alpha^3 f_h - \frac{\zeta}{k} P_k, \end{cases} \quad (3)$$

Турбулентная вихревая вязкость вычисляется по $\nu_t = C_\mu k \zeta \tau$. Остальные коэффициенты и функции были представлены в статье [3].

Численный метод. Для обеспечения устойчивости при решении уравнений системы (2) в конвективных членах использована разностная схема против потока второго порядка точности по методу контрольного объема. А для диффузионных членов использовалась центральная разность в неявном виде. Связь полей скорости и давления для несжимаемой жидкости реализовывалась с помощью процедуры SIMPLEC [4]. После формирования квазипериодического режима проводилось усреднение нестационарных полей.

На входе задавался экспериментальный профиль скорости, измеренный для сечения $z = -5D$, соответствующего расположению входа расчетной области. На выходе $z = 5D$ задавались «мягкие» условия. Поток имел следующие входные параметры:

$$Re = \frac{DU_{in}}{\nu} = 30000, \quad S = \frac{\int_0^R V_{0\varphi} V_{0z} r^2 dr}{R \int_0^R V_z^2 r dr} = 0.6, \quad v_\varphi = 0.2U_{in}, \quad v_z = 0.2U_{in}, \quad v_r = 0.05U_{in}.$$

Здесь Re – число Рейнольдса; S – параметр, определяющий степень закрутки входящего потока; U_{in} – максимальная осевая скорость на входе. Для расчетов использовалась сетка 100×100 . Уравнения в безразмерный вид приводились соотношением всех скоростей к U_{in} , а пространственные масштабы – к диаметру малой трубки. Интегрирование по времени проводилось безразмерным шагом $\Delta t = 0.001$. В качестве начальных условий были заданы

$$V_\varphi = V_{0\varphi} \left(1 - \frac{0.1z}{D}\right), \quad V_z = V_{0z}, \quad V_r = 0, \quad \text{if } z > 0 \text{ и } r < 0.5D$$

$$V_\varphi = V_z = V_r = 0, \quad \text{if } z > 0 \text{ и } r > 0.5D.$$

Результаты расчетов. На рис.2–5 сплошными линиями представлены численные результаты. Точками изображены опытные данные, полученные в работа [5–10]. Здесь все пространственные масштабы соотнесены к диаметру входной трубки. На рис.2 и 3 представлены профили соответственно аксиальной и тангенциальной скоростям потока в сечении $x=0.2$. Аналогичные графики представлены на рис.4 и 5 для $x=0.5$.

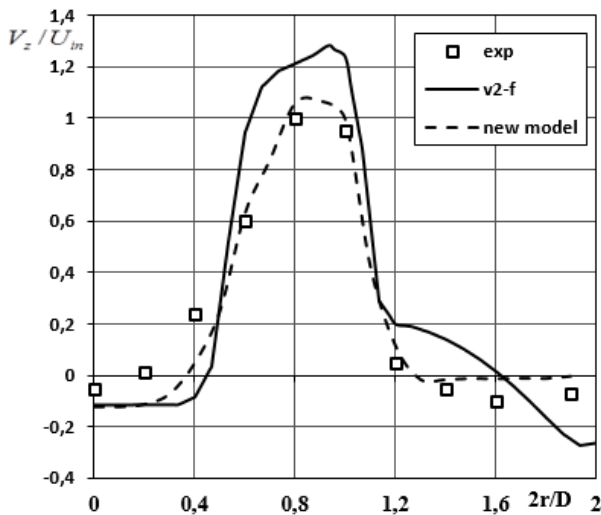


Рис.2. Профиль аксиальной скорости при $x=0.2$

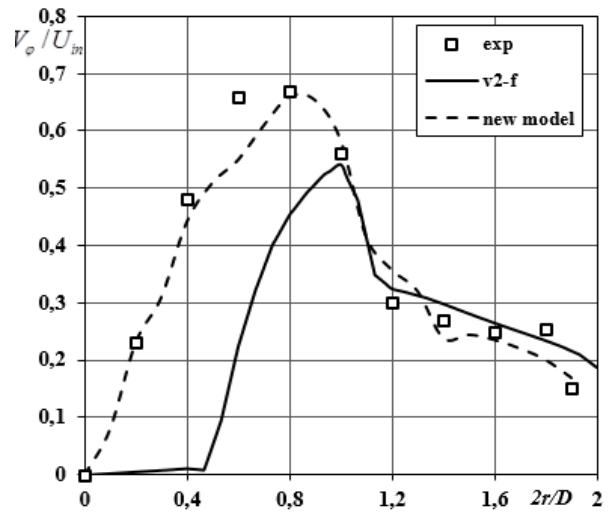


Рис.3. Профиль тангенциальной скорости при $x=0.2$

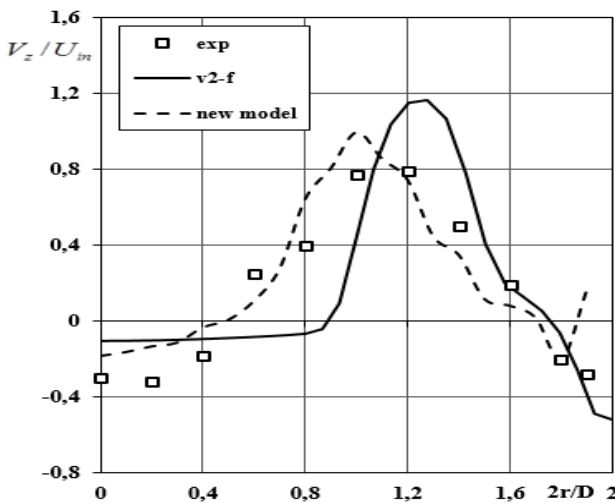


Рис.4. Профиль аксиальной скорости при $x=0.5$

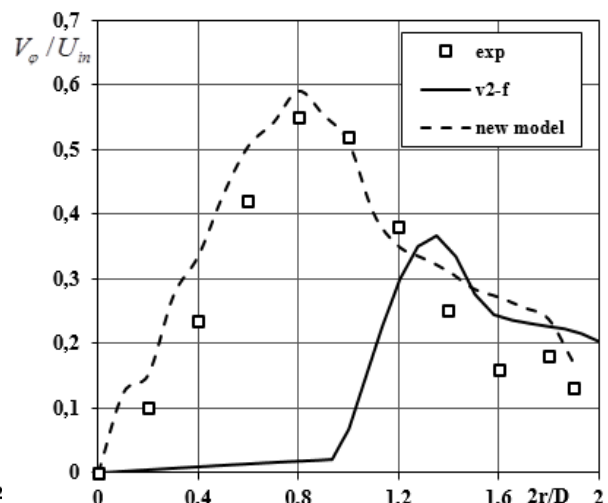


Рис.5. Профиль тангенциальной скорости при $x=0.5$

На рис.6–9 сплошными линиями представлены численные результаты. Здесь диаметр второй трубы в пять диаметра раз больше первой трубы. На рис.6 и 7 представлены профили соответственно аксиальной и тангенциальной скоростей потока в сечении $x=0.2$. Аналогичные графики представлены на рис.8 и 9 для $x=0.5$.

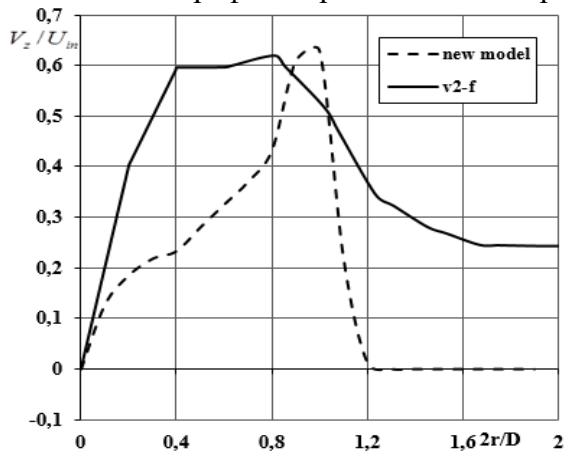


Рис.6. Профиль аксиальной скорости при $x=0.2$

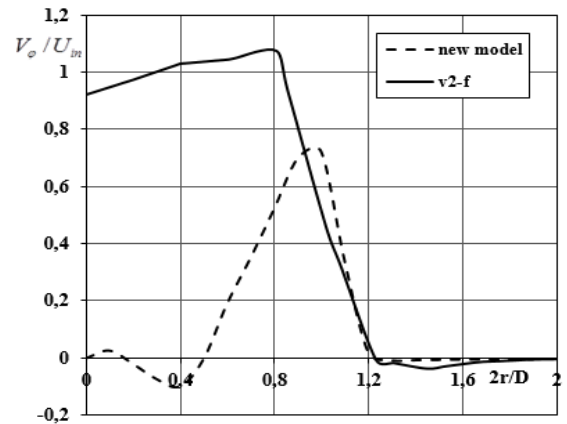


Рис.7. Профиль тангенциальной скорости при $x=0.2$

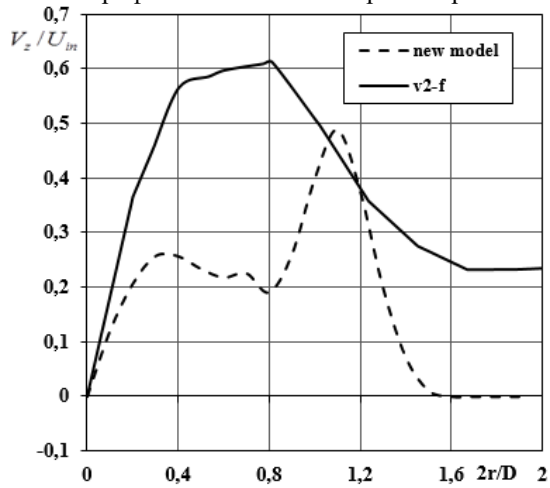


Рис.8. Профиль аксиальной скорости при $x=0.5$

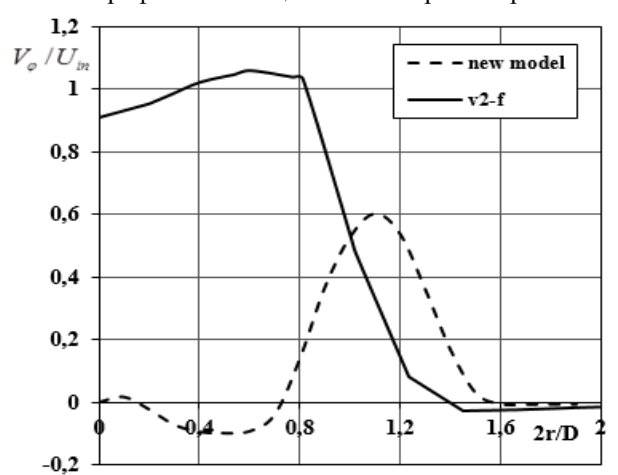


Рис.9. Профиль тангенциальной скорости при $x=0.5$

На рис. 10 – 13 сплошными линиями представлены численные результаты. Здесь диаметр второй трубы в десять раз больше диаметра первой трубы. На рис.9 и 10 представлены профили соответственно аксиальной и тангенциальной скоростей потока в сечении $x=0.2$. Аналогичные графики представлены на рис.12 и 13 для $x=0.5$.

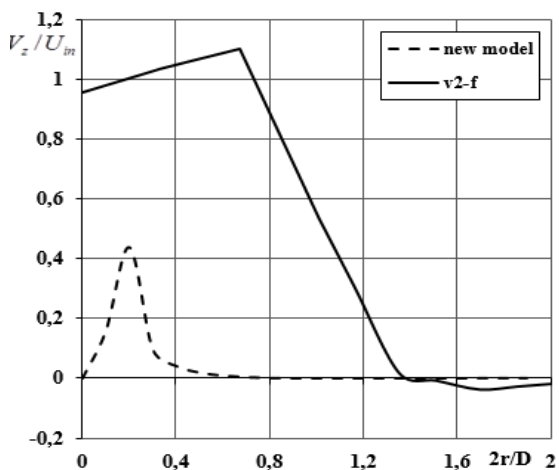


Рис.10. Профиль аксиальной скорости при $x=0.2$

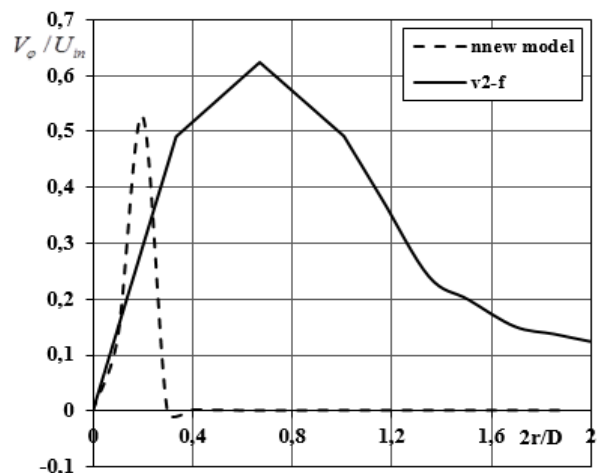


Рис.11. Профиль тангенциальной скорости при $x=0.2$

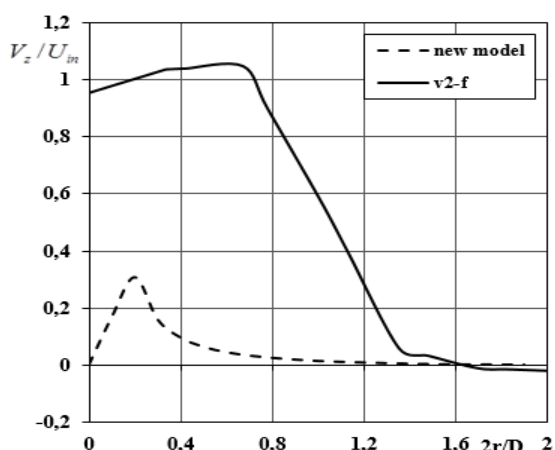


Рис.12. Профиль аксиальной скорости при $x=0.5$

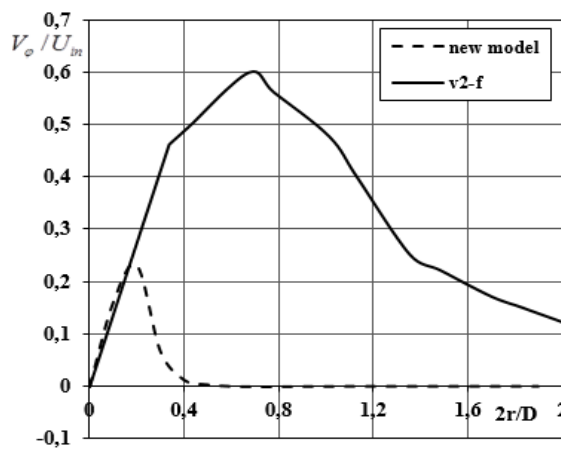


Рис.13. Профиль тангенциальной скорости при $x=0.5$

Заключение. В статье показана возможность моделирования вихревого течения после внезапного расширения с помощью новой модели. Поэтому математическое моделирование проведено на основе динамики двух жидкостей. Калибровка и верификация новой модели проведены с использованием известных задач, которые экспериментально хорошо исследованы. Несмотря на то, что природа турбулентности у этих задач разная, новая модель количественно неплохо описывает эти сложные течения.

Литература

- [1] *Абрамович Г.Н.* Теория турбулентных струй. М.: Наука, 1984. – 716 с.
- [2] *Malikov Z.M.* Mathematical Model of Turbulence Based on the Dynamics of Two Fluids // Applied Mathematic Modeling. 2020. № 82. P. 409–436.
- [3] *Смирнов П.Е.* Тестирование v2-f-модели турбулентности при расчете течения и теплообмена в канале с внезапным расширением // Инженерно-физический журнал. Т. 79. №4. С. –38.
- [4] *Patankar S.V.* Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Taylor&Francis. ISBN 978-0-89116-522-4. 1980.
- [5] *Dellenback P.A., Metzger D.E., Neitzel G.P.* Measurements in turbulent swirling flow through an abrupt expansion // AIAA J. Vol. 26. 1988. No. 6. P. 669–681.
- [6] *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. – 678 с.
- [7] *Андерсон Д., Таннехил Д., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, Т.1. – 384с.; 1990. Т.2. – 392с.
- [8] *Von Mises R., Angew. Z. Bernerkungen zur Hydrodynamik.* Math. u. Mech. 1927. N. 7. P. 425.
- [9] *Bradshaw P., Ferriss D.H., Atwell N.P.* Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation, J. Fluid Mech., 1967.
- [10] *Spalart P.R., Allmaras S.R.* A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamics Flows, Boeing Commercial Airplane Group. Seattle; Washington, 1992.

Дата поступления
22.11.2021 г.

Наврұзов Д.П. Тўсатдан кенгайишдан кейинги ҳар хил диаметрли қувурларда уюрмали оқимнинг сонли тадқиқоти

Аннотация: Ушбу мақолада тўсатдан кенгайдиган қувурда кучли айланма оқимни икки суюқлик ва COMSOL пакет дастуридаги v²-f турбулент моделлари ёрдамида сонли тадқиқот олиб борилган. Олинган натижалар маълум тажриба натижалари билан солиштирилган. Тадқиқотнинг асосий мақсади анизотроп турбулентликда турбулент моделларни хусусиятларини текширишидир. Икки суюқлик модели турбулент оқимларни яхши ифодалаши кўрсатилган.

Калим сўзлар: тўсатдан кенгайиш; икки суюқлик динамикаси; уюрма; моляр суюқлик; COMSOL пакет программаси.

Navruzov D.P. Numerical analysis of vortex flows after sudden expansion of pipes with different diameters

Annotation: In this paper, a numerical study of a sharply expanding strongly swirling flow carried out using v²-f models based on the Comsol Multiphysics 5.6 software package and a two-fluid turbulence model. The results obtained compared with known experimental data with different pipe diameters. The purpose of this work is to test the ability of models to describe anisotropic turbulence. It has shown that the two-fluid model is more suitable for the study of such flows.

Keywords: sudden expansion; dynamics of two liquids; vortex; reference volume; molar viscosity; package COMSOL program.

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ КОМБИНИРОВАННОЙ ХЛОПКОУБОРОЧНОЙ МАШИНЫ В ВЕРТИКАЛЬНО-ШПИНДЕЛЬНОМ ИСПОЛНЕНИИ

Матчанов Р.Д.¹, Йулдашев А.Т.², Кулдошев Д.А.^{1,3}, Джураева Н.Б.²

¹СП «Agrixim», Ташкент, Узбекистан

²Институт механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз. Ташкент, Узбекистан

³Ташкентский государственный технический университет имени Ислама Каримова. Ташкент, Узбекистан

E-mail: raf1942@mail.ru, don_02@mail.ru

Аннотация: В данной статье приведены результаты численных исследований по обоснованию конструкции приемной камеры рабочего аппарата комбинированной хлопкоуборочной машины МХ-1,8 ГВ в вертикально-шпиндельном исполнении. Проведена оценка пропускной способности серийной и новой приемных камер в зависимости от раскрытой урожайности, полноты машинного сбора хлопка, ширины захвата и скорости машин. Установлены предельные значения пропускной способности рассматриваемых приемных камер: для серийной приемной камеры предельной является $V_{np}=26.4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}$, для новой $V_{np}=51.0 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}$. Обосновано, что при таких режимах работы обеспечивается надежная беззабойная работа пневмотранспортной системы хлопкоуборочных машин с вертикально-шпиндельными аппаратами. Для одноразового сбора урожая хлопка рекомендуется использование новой приемной камеры, которая позволяет убирать хлопок при урожайности более 30 ц/га.

Ключевые слова: комбинированная хлопкоуборочная машина; пневмотранспорт; воздушный поток; серийная приемная камера; новая приемная камера; хлопок; объем приемной камеры; объем хлопка.

Введение. В последние годы, начиная с 2018 г. в Узбекистане меняется технология машинного сбора хлопка-сырца. Применяется одноразовый сбор при раскрытии урожая свыше 90%. Это привело к тому, что при раскрытой урожайности хлопчатника свыше 30 ц/га наши отечественные хлопкоуборочные машины (ХУМ) стали плохо работать. Это сопровождалось увеличением потери хлопка-сырца на землю и уменьшением полноты машинного сбора при раскрытии свыше 90%. При такой технологии нагрузка на пневмотранспортную систему хлопкоуборочной машины возрастает. В связи с этим для комбинированной ХУМ в вертикально-шпиндельном исполнении актуальной задачей является определение границы урожайности, при которой пневмотранспортная система может осуществлять транспортировку хлопка-сырца без потерь на землю и забоев приемной камеры.

Работа пневмотранспортных систем отечественных хлопкоуборочных машин рассмотрена в исследованиях Г.А. Кошевникова, Л.М. Шварцмана, В.А. Бережного, А.А.Слободкина, Н.А. Артыкова, А.А. Исмаилова, С. Усарова, Х.А. Зияева, К. Джалоловой, З.Х. Алимова и других ученых; в трудах АН РУз, ЦНИИХПром, САИМЭ, ТашПИ, ТИИИМСХ, ТИТЛП, ГСКБ по машинам для хлопководства и зарубежных публикациях [1–18].

В настоящее время в серийных хлопкоуборочных машинах, выпускаемых на заводах Республики Узбекистан, установлены целевые приемные камеры, представляющие собой вертикальную трубу 1, с щелью вдоль образующей, равной по высоте щеточному съемнику 2 (рис.1). Съемник расположен на входе в щель так, что зазор для прохода хлопка-сырца между концами щетки и стенкой входной щели S составляет 5 – 8 мм, а нижняя часть трубы

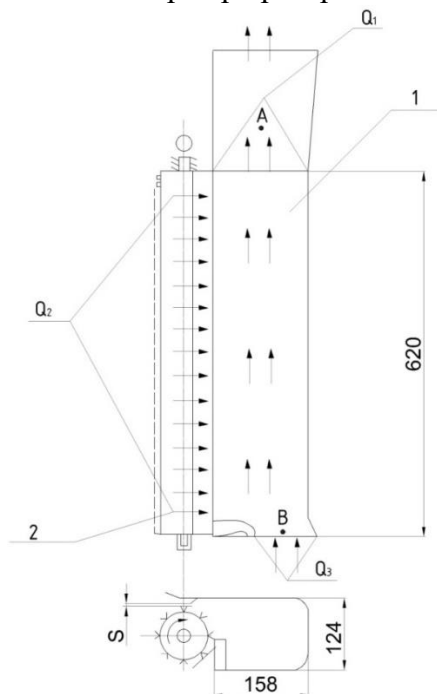


Рис.1. Щелевая приемная камера:
1–вертикальная труба; 2–щеточный
съемник

открыта для забора чистого воздуха [7]. Следовательно, через зазор между концами щеток съемника вместе с материалом будет проходить определенное количество загрязненного воздуха от межбарабанного пространства, несколько снижающее качество собираемого хлопка, т.е. происходит аспирация межбарабанного пространства аппарата.

Однако в опубликованных работах недостаточно раскрыты вопросы технологии одностороннего сбора урожая, при которой пневмотранспортная система может осуществлять транспортировку хлопка-сырца без потерь на землю и забоев приемной камеры.

В работе [19] достаточно широко проанализированы принцип работы и недостатки щелевой приемной камеры (рис.1).

Авторами [19] использован пакет программы ANSYSFLUEN и определены потери при различных удельных весах долек хлопка в зависимости от расхода воздуха (рис.2).

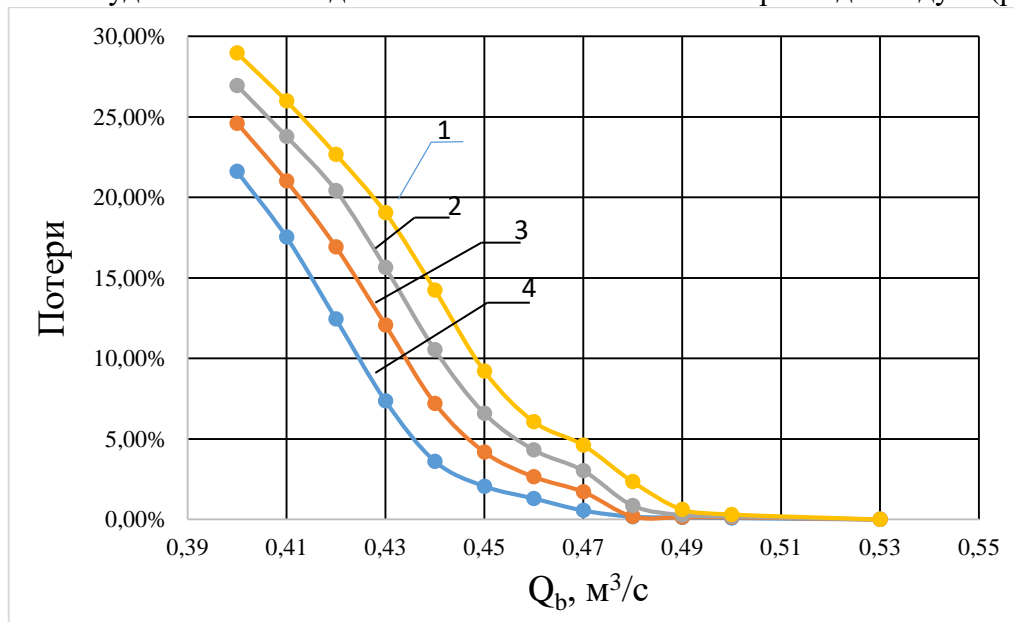


Рис.2. Потери урожая при различных плотностях долек хлопка в зависимости от расхода воздуха:
1– $\gamma=45 \text{ кг}/\text{м}^3$; 2– $\gamma=35 \text{ кг}/\text{м}^3$; 3– $\gamma=25 \text{ кг}/\text{м}^3$; 4– $\gamma=15 \text{ кг}/\text{м}^3$

Анализ (см.рис.2) показывает, что расход воздуха (пропускная способность) для одной приемной камеры должен быть не менее $0.5 \text{ м}^3/\text{с}$. Например, при расходе воздуха $0.47 \text{ м}^3/\text{с}$ выпадение хлопка из приемной камеры на землю составляет: при удельном весе дольки хлопка $\gamma=15 \text{ кг}/\text{м}^3$ – 0.56%, при $\gamma=25 \text{ кг}/\text{м}^3$ – 1.72%, при $\gamma=35 \text{ кг}/\text{м}^3$ – 3.04% и при $\gamma=45 \text{ кг}/\text{м}^3$ – 4.61%.

Серийная приемная камера не позволяет собрать хлопок без потерь на землю при расходе воздуха менее $0.5 \text{ м}^3/\text{с}$ для одного трубопровода. Для исключения этого недостатка нами разработана новая приемная камера [20]. Определение предельных возможностей приемных камер по их пропускной способности является актуальной задачей для повышения эффективности работы комбинированных хлопкоуборочных машин.

Цель работы – определение предельных возможности серийной и новой приемных камер по их пропускной способности при увеличении объемов поступающего хлопка из уборочного аппарата.

Методы. Разработанная новая приемная камера представлена на рис.3, а, б: приемная камера состоит из вертикального приемного патрубка 1 с боковым щелевидным отверстием для приема хлопковой массы, равным по высоте щеткам 2 съемника, изогнутого дна 3, соединяющего вертикальный приемный патрубок 1 с отводящим патрубком б, окна с крышкой 4 для удаления при необходимости твердых примесей, обтекателя 5 для направления смеси воздуха с хлопком с меньшим сопротивлением к отводящему патрубку б, со-

единенному со всасывающей магистралью вентилятора. С целью сокращения местного сопротивления сечения приемной камеры 1, отводящего патрубка б и нижней части переходной зоны изогнутого дна 3 выполнены одинаковыми.

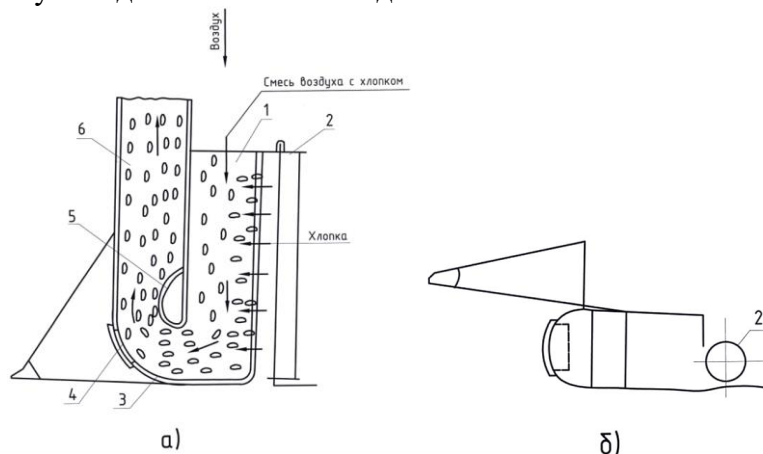


Рис.3.Новая приемная камера: 1 – вертикальная патрубка; 2 – съемник; 3 – изогнутое дно; 4 – окно; 5 – обтекатель; б – отводящий патрубок: а – вид сбоку; б – вид сверху



Рис.4. Стенд для испытаний новой приёмной камеры



Рис.5. Приспособление для подачи хлопка-сырца в приемную камеру

Транспортировка хлопка-сырца в приемной камере осуществляется следующим образом. При работе уборочного аппарата хлопок, собранный барабанами, забрасывается съемниками в приемный патрубок 1, далее всасывающим воздушным потоком дольки хлопка двигаются сверху вниз приемной камеры, при этом воздушный поток повышает свою скорость и достигает максимального значения в нижней части приемной камеры, где хлопок попадает на изогнутое дно 3, затем, воздушный поток с максимальной скоростью перемещает хлопок по отводящему патрубку б к всасывающей магистрали вентилятора и далее- в бункер хлопкоуборочной машины.

Проведены расчетно-численные и экспериментальные исследования закономерности поступления хлопка в серийную и новую приемные камеры комбинированной хлопкоуборочной машины в вертикально-шпиндельном исполнении.

По рекомендациям ГСКБ по машинам для хлопководства [7] известно, что беззабойная работа серийной (целевой) приемной камеры обеспечивается при концентрации воздушно-хлопковой смеси $\mu=0.2$ и производительности каждого трубопровода $Q=0.55$ м³/с.

Поэтому для новой приемной камеры предельно допустимую концентрацию смеси определим экспериментальным путём при стендовых испытаниях. Стенд с новыми приемными камерами показан на рис.4.

При однократном машинном сборе хлопка на скорости машины $V=4.2$ км/ч, при раскрытой урожайности $G_p=4.5$ т/га, полноте машинного сбора $P=0.85$, ширине междурядья $B=0.9$ м в приемную камеру за одну секунду поступает $G_{хл}=0.2$ кг хлопка.

Для равномерной подачи 0.2 кг хлопка-сырца по высоте приемной камеры за одну секунду изготовлено специальное приспособление. Приспособление, заполненное 0.2 кг хлопка-сырца, показано на рис.5.

Для подачи хлопка-сырца из приспособления в приемную камеру необходимо перемещать толкатели до упора. При стендовых испытаниях объем всасываемого воздуха взят из следующих соображений.

При транспортировке хлопка в хлопкоперерабатывающей отрасли коэффициент воздушно-хлопковой смеси $\mu=0.6\div 0,8$ [21]. Для испытания новой приемной камеры принимаем концентрацию смеси $\mu=0.5$, что обеспечивает производительность камеры $Q=0.3$ м³/с.

Приспособление, заполненное хлопком-сырцом $G_{хл}=0.2$ кг, установили в окошко приемных камер, куда поступает хлопок-сырец из рабочего аппарата. С перемещением толкателя за одну секунду 0.2 кг до упора находившегося в ящике хлопка-сырца было подано в приемную камеру. Кинетика последовательности транспортирования хлопка-сырца из новой приемной камеры показана на рис.6. Установлено, что 0.2 кг поданного хлопка-сырца эффективно транспортируется из новой приемной камеры.

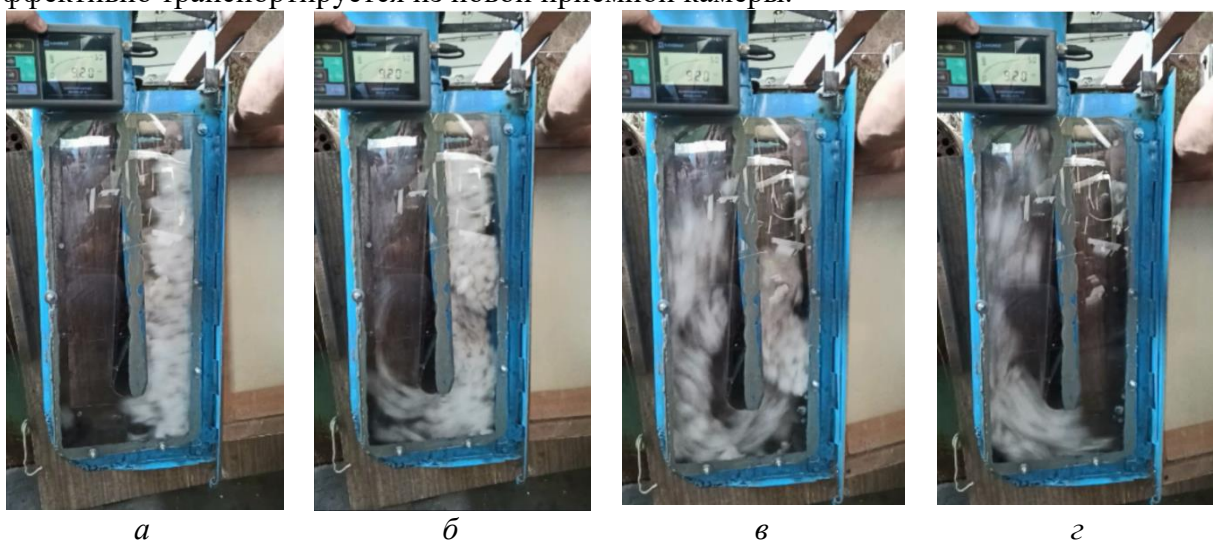


Рис.6. Кинетика транспортировки хлопка-сырца из новой приемной камеры: а – начало движения дольки хлопка $t=0$ с; б – через промежуток времени $t=0.01$ с; в – через промежуток времени $t=0.144$ с; г – через промежуток времени $t=0.332$ с

Аналогичный опыт повторяли для серийной приемной камеры, приведенной на рис.7.

Объем всасываемого воздуха серийной приемной камеры составляет 0.33 м³/с. Это было связано с тем, что сопротивление в серийной приемной камере меньше по сравнению с новой приемной камерой.

Сопоставляя рис.6, а,б и рис.7, а,б, видим, что объем поступающего хлопка-сырца в новую и серийную приемные камеры одинаковый. Однако из новой приёмной камеры хлопок-сырец хорошо всасывается. На рис.6, г видно, что хлопок-сырец полностью транспортировался из приемной камеры.

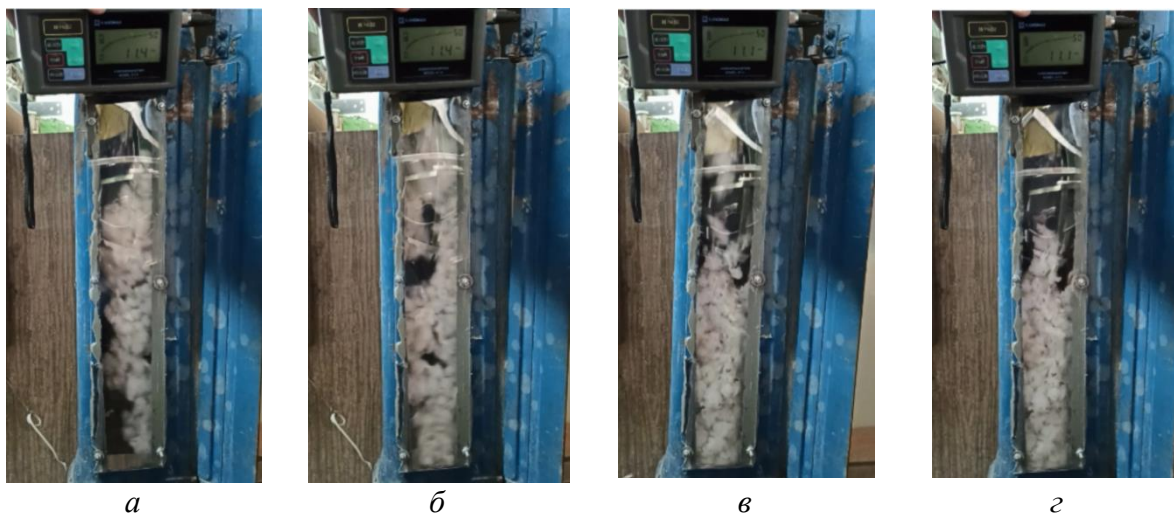


Рис.7. Кинетика транспортировки хлопка-сырца из серийной приемной камеры: *а* – начала движения дольки хлопка $t=0$ с; *б* – через промежуток времени $t=0.282$ с; *в* – через промежуток времени $t=0.401$ с; *г* – через промежуток времени $t=0.468$ с

Половина хлопка-сырца в серийной приемной камере, приведенной на рис.7, *в,г*, остается в результате забоя. Это указывает на то, что транспортирующая способность хлопка-сырца серийной приемной камеры низкая по сравнению с новой приемной камерой, несмотря на её высокую производительность. На основании вышеприведенных опытов определяем концентрацию воздушно-хлопковой смеси для транспортировки хлопка-сырца с применением новой приемной камеры:

$$\mu = \frac{G_m}{Q_v \cdot \rho} = \frac{0.2}{0.3 \cdot 1.2} = 0,55, \quad (1)$$

где ρ – плотность воздуха, $\rho = 1.2$ кг/м³; $\mu=0.5$ – величина, принятая с учетом запаса для дальнейших расчетов.

На основе экспериментальных данных и расчетно-численных исследований также определена производительность новой приемной камеры $Q'=0.425$ м³/с, которая учитывает аэродинамические сопротивления в процессе работы серийной приемной камеры при производительности $Q=0.55$ м³/с.

В связи с этим для расчетно-численного исследования новой приемной камеры принимаем производительность одного трубопровода $Q'=0.425$ м³/с и концентрацию смеси воздуха $\mu=0.5$.

Согласно размерам, представленным на рис.1, объемы приемных камер серийного и нового вариантов одинаковы и равны [7,19]

$$V_{ПК} = a \cdot b \cdot h, \quad \text{м}^3, \quad (2)$$

где a – длина приемной камеры ($a=0.158$ м); b – ширина приемной камеры ($b=0.124$ м); h – высота приемной камеры ($h=0.62$ м).

Согласно выражению (2), объем приемной камеры составляет

$$V_{ПК} = 0.158 \cdot 0.124 \cdot 0.62 = 0.0121 \quad \text{м}^3.$$

Массу хлопка-сырца, поступающую в приемную камеру за одну секунду, определяем по формуле

$$G_m = \frac{G_p \cdot B \cdot V_m \cdot P}{n \cdot 10^4} \quad \text{кг/с}, \quad (3)$$

где G_p – раскрытый урожай с одного гектара ($G_p=2.0 \div 3.5$ т/га); B – ширина междурядья ($B=0.9$ м); V_m – скорость движения машины $V_m=4.2$ км/ч = 1.16 м/с; P – полнота машинного

сбора хлопка ($P=0.85$); n —количество всасывающих трубопроводов при сборе с одного рядка ($n=2$).

Изменение объема хлопка-сырца, поступающего в приемную камеру в единицу времени:

$$V_{\text{хл}} = \frac{G_m}{\gamma} \quad \text{м}^3 / \text{с}, \quad (4)$$

где γ — плотность хлопка-сырца, $\text{кг}/\text{м}^3$ ($\gamma=50\text{кг}/\text{м}^3$, $\gamma=30\text{кг}/\text{м}^3$, $\gamma=15 \text{ кг}/\text{м}^3$).

Результат. На основании вышеприведённых выражений (3) и (4) заполняем таблицу.

Изменение объема хлопка, поступающего в приемную камеру в зависимости от раскрытой урожайности, полноты сбора при междурядье $B=0.9$ м, $V_m=1.16$ м/с, $P=0.85$

G_p , т/га	2.0	2.5	3.0	3.5	
G_m , кг/с	0.088	0.111	0.133	0.155	
$V_{\text{хл}}$, $\text{м}^3/\text{с}$	$\gamma=50 \text{ кг}/\text{м}^3$	0.0017	0.0022	0.0026	0.0031
	$\gamma=30 \text{ кг}/\text{м}^3$	0.0029	0.0037	0.0044	0.0052
	$\gamma=15 \text{ кг}/\text{м}^3$	0.0058	0.0074	0.0088	0.0103

Вертикально-шпиндельный аппарат с применением серийной и новой приемных камер показан на рис.8, а, б.



Рис.8. Вертикально-шпиндельные аппараты: а – с серийными камерами; б – новыми приемными камерами

Определим предельно допустимую массу хлопка, поступающего в приемную камеру:

$$G_m = \mu \cdot Q_{\text{в}} \cdot \rho \quad \text{кг}/\text{с}, \quad (5)$$

где μ – допустимая концентрация смеси воздуха ($\mu=0.2$ – для серийной приемной камеры, $\mu=0.5$ – для новой приемной камеры); $Q_{\text{в}}$ – рекомендуемая производительность одного трубопровода ($Q_{\text{в}}=0.55 \text{ м}^3/\text{с}$ – для серийной приемной камеры, $Q'_{\text{в}}=0.425 \text{ м}^3/\text{с}$ – для новой приемной камеры).

Определим предельно допустимую массу хлопка, поступающего в серийную приемную камеру:

$$G_m = 0.2 \cdot 0.55 \cdot 1.2 = 0.132 \quad \text{кг}/\text{с}.$$

Определим предельно допустимую массу хлопка, поступающего в новую приемную камеру:

$$G_m = 0.5 \cdot 0.425 \cdot 1.2 = 0.255 \quad \text{кг}/\text{с}.$$

Предельно допустимый объем хлопка-сырца, поступающего в приемную камеру, согласно выражению (3), равен:

для серийной приемной камеры:

$$\text{при: } \gamma=50 \text{ кг}/\text{м}^3 \quad V_{\text{нр}}=0.132:50=0.00264 \text{ м}^3/\text{с};$$

$$\gamma=30 \text{ кг}/\text{м}^3 \quad V_{\text{нр}}=0.132:30=0.0044 \text{ м}^3/\text{с};$$

$\gamma=15 \text{ кг/м}^3 \quad V_{np}=0.132:15=0.0088 \text{ м}^3/\text{с};$
 для новой приемной камеры:
 при: $\gamma=50 \text{ кг/м}^3 \quad V_{np}=0.255:50=0.0051 \text{ м}^3/\text{с};$
 $\gamma=30 \text{ кг/м}^3 \quad V_{np}=0.255:30=0.0085 \text{ м}^3/\text{с};$
 $\gamma=15 \text{ кг/м}^3 \quad V_{np}=0.255:15=0.017 \text{ м}^3/\text{с}.$

Обсуждение. Сопоставляя данные таблицы с результатами расчетов по формуле 5, видим, что предельно допустимые объемы заполнения серийной приемной камеры наблюдаются при урожайности хлопчатника $G_p=3.0 \text{ т/га}$, рабочей скорости машины $V_m=1.16 \text{ м/с}$ и коэффициенте полноты сбора хлопка $P=0.85$. Предельно допустимый объем заполнения новой приемной камеры наблюдается при урожайности свыше 3.5 т/га при прочих равных условиях. Из этого следует, что производительность новой приемной камеры в $0.255:0.132=1.93$ раза выше, чем у серийной.

Определим коэффициент заполняемости приемной камеры хлопком-сырцом за одну секунду:

$$K = \frac{V_{xl}}{V_{нк}}, \quad (5)$$

где: V_{xl} – объем поступающего хлопка в приемную камеру за одну секунду (согласно таблице); $V_{нк}$ – объем приемной камеры ($V_{нк}=0.0121 \text{ м}^3$).

Например определим коэффициент заполняемости “К” при раскрытой урожайности хлопка-сырца $G_p=3.5 \text{ т/га}$, полноте машинного сбора $P=0.85$ и удельном весе хлопка $\gamma=30 \text{ кг/м}^3$.

Для серийной приемной камеры

$$K = \frac{0.0044}{0.0121} = 0.36.$$

Для модернизированной приемной камеры

$$K = \frac{0.0085}{0.0121} = 0.70.$$

Сопоставление коэффициентов заполняемости приемной камеры указывает на повышение порога беззабойной работы новой приемной камеры в 1.94 раза по сравнению с серийной.

Заключение.

1. Увеличение пропускной способности новой приемной камеры позволяет повысить эффективность работы комбинированной хлопкоуборочной машины на однократном сборе урожая хлопка.

2. Повышение порога беззабойной работы приемной камеры обеспечивает комбинированной хлопкоуборочной машине в вертикально-шпиндельном исполнении эффективно собирать хлопок на полях с высокой урожайностью.

Литература

- [1] Матчанов Р.Д. Хлопкоуборочные машины 1929-2010 гг. Ташкент, 2011. С.66 –75.
- [2] Шоумарова М., Абдиллаев Т. Қишлоқ хўжалиги машиналари. Ташкент: “Ўқитувчи”, 2002. Б.336-370.
- [3] TIAN Jing-shan, ZHANG Xu-yi, ZHANG Wang-feng, LI Jian-feng, YANG Yan-long, DONG Heng-yi, JIU Xing-li, YU Yong-chuan, ZHAO Zhan, XU Shou-zhen, ZUO Wen-qing. Fiber damage of machine-harvested cotton before ginning and after lint cleaning.// Journal of Integrative Agriculture. 2018. № 17(5). P. 1120–1127.
- [4] Шполянский Д.М., Атаманов Ю. П., Самандаров С.А. Повышение качества х/с машинного сбора //Хлопковая промышленность. 1971. С. 4.
- [5] Шварцман Л.М. Аэродинамика пневмотранспорта хлопка: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Ташкент, 1960.
- [6] Бережной В.Г. Исследование и разработка съемно-транспортирующих устройств хлопкоуборочного аппарата с использованием диаметального вентилятора: Автореф. дис ... канд.техн.наук. Ташкент, 1972.
- [7] Артыков Н.И., Пневмотранспорт легкоповреждаемых материалов. Ташкент: Фан, 1984.–143 с.
- [8] Шамсутдинов Т.Ш., Некоторые вопросы аэродинамики хлопка: Автореф.дис. ... к.т.н.1960.

- [9] Арзумянц А.Г., Пилюганова Э.А. К вопросу об аэродинамическом сопротивлении приемных камер хлопкоуборочных машин // Механизация хлопководства. 1973. №6. С.8–9.
- [10] Слободкин А.А., Арзумянц А.Г. К вопросу о создании приёмной камеры для хлопкоуборочной машины с нагнетательным пневмотранспортом // Механизация хлопководства. 1975. №5. С. 9–10
- [11] Исмаилов А.А. Исследование и выбор методов повышения технологической надежности пневмотранспортных систем хлопка: Автореф. дис. ... канд.техн.наук. Кострома, 1981.
- [12] Усаров С. Исследование и обоснование параметров механического транспортера хлопкоуборочных машин: Автореф. дис. ... канд.техн.наук. Ташкент, 1972.
- [13] Зияев Х.А. Исследование и разработка центробежного вентилятора с лопатками нового типа для хлопкоуборочных машин: Автореф.дис ... канд.техн.наук. Ташкент, 1967. –20с.
- [14] Алимова З.Х. Динамика взаимодействия долей плопка с элементами пневмотраспортных систем хлопкоуборочных машин: Автореф.дис ... канд.техн.наук. Ташкент,1999. –18с.
- [15] Rizaev A.A., Matchanov R.D., Yuldashev A.T., Djuraeva N.B. Cotton harvesters for one-time cotton-picking / IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 1030 (2021) 012173 IOP Publishing doi:10.1088/1757-899X/1030/1/012173.
- [16] Rizaev A.A., Malikov Z.M., Yuldashev A.T., Temirov D.A., Borotov A.N. Bench-scale study of centrifugal fan parameters / IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 1030 (2021) 012175 IOP Publishing doi:10.1088/1757-899X/1030/1/012175
- [17] Matchanov R.D., Rizaev A.A., Yuldashev A.T., Kuldoshev D.A., Mirzaeva M.M. New universal inlet chamber for vertical and horizontal spindle cotton pickers/Journal of Physics: Conference Series 1889.2021. 042006 IOP Publishing doi:10.1088/1742-6596/1889/4/042006.
- [18] Matchanov R.D., Rizaev A.A., Yuldashev A.T., Kuldoshev D.A., Akhmedov Sh.A. Pneumatic Transport System of a Cotton Picker // International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering (IJITEE). ISSN: 2278-3075. Vol-9. Issue-4. February 2020. P. 2267–2270.
- [19] Маликов З.М., Йўлдашев А.Т., Кулдошев Д.А., Маликов Б.З. Влияние массовой концентрации хлопка на эффективность пневмотранспортной системы хлопкоуборочной машины // Узбекский журнал “Проблемы механики”. Ташкент. 2021. № 1. С. 73–80.
- [20] Отажонов Н.С., Матчанов Р.Ф., Ризаев А.А., Маликов З.М., Йўлдашев А.Т. и др. Способ транспортирования хлопка-сырца из приемной камеры в бункер хлопкоуборочной машины и устройство для его осуществления /Заявка № IAP 2019 0507. Дата подачи заявки 12.12.2019.
- [21] Роганов Б.И., Джабаров Г.Д., Котов Д.А., Балтабаев С.Д., Соловьев Н.Д. Первичная обработка хлопка. М.: Легкая индустрия, 1965. С. 406–417.

Дата поступления
17.01.2022

Матчанов Р.Д., Йўлдашев А.Т., Кулдошев Д.А., Джуроева Н.Б. Вертикал-шпинделли комбинациялашган ПТМ нинг иш самарадорлигини ошириш

Аннотация: Бу мақолада комбинациялашган пахта териш машинаси МХ-1,8 ГВ вертикал шпинделли пахта териш аппарат билан жиҳозланганда терим аппаратининг қабул камераси конструкциясини асослашга сонли тадқиқотлари келтирилган. Сериядаги ва янги қабул камерасини пахта ҳосилдорлиги очилганлик даражаси, терим тўлиқлиги, терим қамрови ва машина тезлигига нисбатан пахта ҳом-ашиёсини ўтказувчанлигини баҳолаш ўтказилди. Қараб чиқилаётган қабул камерасидаги ўтказувчанликни чегаравий қийматлари топилди. Сериядаги қабул камераси учун ўтказувчанликни чегаравий қиймати $V_{пр} = 26.4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}$, янги қабул камераси учун $V_{пр} = 51.0 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}$. Бундай иш режимида вертикал шпинделли пахта териш машинасининг пневмотранспорт тизимида ишончли ва пахта ҳом-ашиёсини тикилмасдан ҳаракатланиши таъминланади. Бир маротабалик пахта териш учун янги қабул камераси тавсия этилиб, пахта ҳосилдорлиги 30 ц/га юқори бўлган ҳолатларда фойдаланишга имкон яратади.

Калим сўзлар: комбинациялашган пахта териш машинаси; пневмотранспорт тизими; ҳаво оқими; серияли қабул камераси; янги қабул камераси; пахта; қабул камерасининг ҳажми; пахта ҳажми.

Matchanov R.D., Yuldashev A.T., Kuldoshev D.A., Djuraeva N.B. Improving the efficiency of the combined HUM in vertical-spindle design

Abstract: This article presents numerical studies to substantiate the design of the receiving chamber of the working apparatus of the combined cotton harvest machine MX-1.8 GV in a vertical spindle design. An assessment of the throughput capacity of the serial and new receiving chambers was carry out depending on the disclosed yield, the completeness of the cotton harvest machine, the width of the capture and the speed of the machines. The limit values of the throughput of the receiving chambers under consideration have been establish. For the serial receiving chamber, the limit is $V_{pr} = 26.4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$, for the new $V_{pr} = 51.0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$. With such operating modes, reliable, trouble-free operation of the pneumatic transport system of cotton harvesters with vertical spindle apparatuses is ensure. For a one-time cotton harvest, it is recommend to use a new receiving chamber, which allows you to harvest cotton with a yield of more than 30 s/ga.

Keywords: combined cotton harvester; pneumatic transport; air flow; serial receiving chamber; new receiving chamber; cotton; receiving chamber volume; cotton volume.

ИССЛЕДОВАНИЕ МАШИННОГО АГРЕГАТА СЕМЯОТВОДЯЩЕГО УСТРОЙСТВА ПИЛЬНОГО ДЖИНА С ВРАЩАЮЩИМСЯ ШНЕКОМ

Мухаммадиев Д.М.¹, Ахмедов Х.А.¹, Маллаев О.С.¹, Жамолова Л.Ю.²

¹Институт механики и сейсмостойкости сооружений им.М.Т.Уразбаева АН РУз. Ташкент, Узбекистан

²Ташкентский государственный аграрный университет. Ташкент, Узбекистан

E-mail: davlat_mm@mail.ru

Аннотация: В статье приводятся материалы исследований машинного агрегата семяотводящего устройства пыльного джина с вращающимся шнеком. Составлены уравнения движения машинного агрегата семяотводящего устройства пыльного джина и экспериментально определены моменты инерции электродвигателя и семяотводящего устройства с вращающимся шнеком. Установлено, что максимальное значение угловой скорости семяотводящей трубы достигает 48.69 рад/с при $t=2.04$ с, опаздывая от электродвигателя на 0.4 с, а максимальное значение угловой скорости семяотводящего шнека составляет 73.04 рад/с.

Ключевые слова: пыльный джин; асинхронный двигатель; машинный агрегат; уравнения движения; семяотводящее устройство; перфорированная труба; вращающийся шнек; ременная и зубчатая передача; движущий момент; частота вращения; потребляемая мощность.

Введение. Известно, что хлопок после сбора хлопкоуборочными машинами [1, 2] перед джинированием подвергается сушке и очистке, где свойства хлопка имеют важное значение [3, 4].

В процессе джинирования волокно отрывается от семян с использованием зубьев пыльных дисков, образующих пыльный цилиндр с междупыльными прокладками [5].

Для повышения производительности и энергоэффективности пыльного джина дополнительно устанавливается семяотводящее устройство (рис.1), которое способствует увеличению скорости вращения сырцового валика [6].

В задачу исследований входят нахождение закона изменения частоты вращения ротора электродвигателя, перфорированной трубы и семяотводящего шнека в функции времени. Кроме того, следует изучить потребляемую мощность электродвигателя, при которой обеспечивается повышенный выход семян из рабочей камеры пыльного джина. Для этого необходимо учитывать упругость звеньев и демпфирующих факторов (диссипация) привода, а упругость и диссипация опор из-за обобщения координат системы не учитываются.



Рис. 1. Вид семяотводящего устройства внутри рабочей камеры

В статье [7] предложен систематический подход при моделировании машинных агрегатов и изложены общие принципы. Машинный агрегат рассмотрен как подсистема электронного управления, подсистемы электропривода и механической рабочей подсистемы.

В монографии И.И.Вульфсона [8] изложены современные методы расчета колебаний машин, включающих механизмы циклового действия (рычажные, кулачковые, шаговые и т.п.). Для уменьшения трудоемкости расчета предложена менее идеализированная расчетная схема, в которой со-

ответствующий элемент отображается в виде подсистемы с распределенными параметрами.

В работе [5] динамические характеристики пыльного джина рассматриваются как подсистемы с сосредоточенными и распределенными параметрами. Построенные в результате изучения машинного агрегата графики позволили установить максимальные значения угла относительного поворота и угла поворота вала пыльного цилиндра при кручении.

Значение величины кратности пускового момента относительно номинального составляет 1.5–6. Но для использованного нами асинхронного электродвигателя оно равно 2

[9]. Из этого следует, что максимальная нагрузка на электродвигатель приходит в момент пуска.

Методы. Семяотводящее устройство состоит из электродвигателя, перфорированной трубы и семяотводящего шнека с ременной и зубчатой передачами.

При составлении дифференциальных уравнений питателя воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right] - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_i} = Q[\varphi_i]. \quad (1)$$

Динамическая модель машинного агрегата и кинематическая схема семяотводящего устройства представлены на рис. 2, где $\mathfrak{J}_D, \mathfrak{J}_T, \mathfrak{J}_{Ш}$ – соответственно моменты инерции электродвигателя, перфорированной трубы и семяотводящего шнека, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$; $M_D, M_T, M_{Ш}$ – соответственно моменты нагрузок, действующих на вращающийся вал электродвигателя, перфорированной трубы и семяотводящего шнека, $\text{Н} \cdot \text{м}$; c_p, c_z – жесткость ременной и зубчатой передачи, $\text{Н} \cdot \text{м} / \text{рад}$; v_p, v_z – коэффициенты диссипации ременной и зубчатой передачи, $\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с} / \text{рад}$; $\dot{\varphi}_D, \dot{\varphi}_T, \dot{\varphi}_{Ш}$ – угловые скорости ротора электродвигателя, перфорированной трубы и семяотводящего шнека, с^{-1} ; i_p, i_z – передаточные отношения ременной и зубчатой передачи.

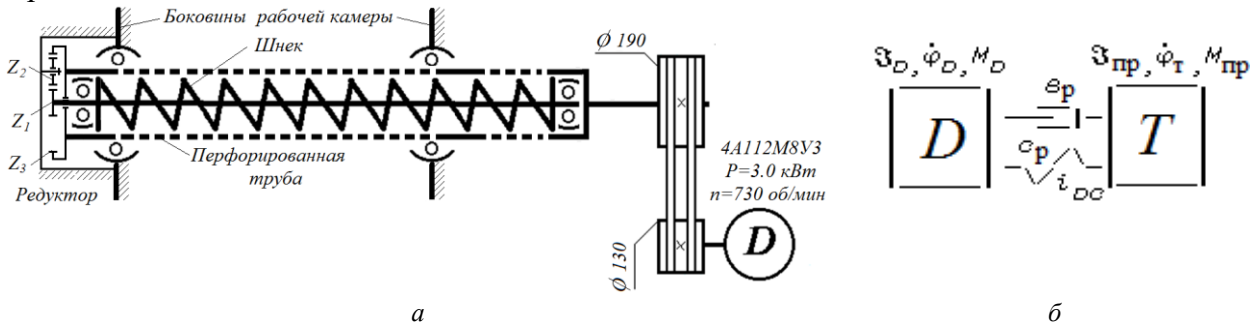


Рис. 2. Кинематическая схема (а) и динамическая модель (б) машинного агрегата семяотводящего устройства с вращающимся шнеком

Привод семяотводящего устройства пильного джина состоит из ременной и зубчатой передач. Для привода семяотводящего устройства справедливы следующие кинематические соотношения:

$$i_p = \dot{\varphi}_D / \dot{\varphi}_T = D_D / D_T = 130/190 = 0.6842, \quad (2)$$

$$i_z = \dot{\varphi}_T / \dot{\varphi}_{Ш} = Z_1 / Z_2 = 12/18 = 0.6667,$$

где D_D и D_T – соответственно диаметры шкива электродвигателя и перфорированной трубы, мм; $Z_1=12, Z_2=18$ – соответственно число зубьев солнечной шестерни и сателлита.

За обобщенные координаты принимаем угловые скорости вращающихся масс электродвигателя, перфорированной трубы и семяотводящего шнека $\dot{\varphi}_D, \dot{\varphi}_T, \dot{\varphi}_{Ш}$.

Из-за высокого значения жесткости редуктора, сил и массы шнека $\mathfrak{J}_{Ш}$ и $M_{Ш}$ приводим к семяотводящей трубе:

$$\mathfrak{J}_{ПР} = \mathfrak{J}_T + \frac{\mathfrak{J}_{Ш}}{i_z^2}, \quad M_{ПР} = \frac{M_T \cdot \dot{\varphi}_T + M_{Ш} \cdot \dot{\varphi}_{Ш}^2}{\dot{\varphi}_T}. \quad (3)$$

Кинетическая энергия семяотводящего устройства имеет следующий вид:

$$T = \frac{\mathfrak{J}_D \cdot \dot{\varphi}_D^2}{2} + \frac{\mathfrak{J}_{ПР} \cdot \dot{\varphi}_T^2}{2}. \quad (4)$$

Потенциальная энергия семяотводящего устройства представляет собой однородную квадратичную форму обобщенных координат и записывается в следующем виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot [c_p \cdot (\varphi_D - i_p \cdot \varphi_T)^2]. \quad (5)$$

Диссипативная функция системы выражается в виде

$$\Phi = \frac{1}{2} \cdot [\varepsilon_p \cdot (\dot{\varphi}_D - i_p \cdot \dot{\varphi}_T)^2]. \quad (6)$$

Определим члены Лагранжевых уравнений:

а) частные производные по перемещениям от потенциальной энергии:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_D} &= c_p \cdot (\varphi_D - i_p \cdot \varphi_T) \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_T} &= -c_p \cdot i_p \cdot (\varphi_D - i_p \cdot \varphi_T) \end{aligned} \right\}; \quad (7)$$

б) частные производные по перемещениям от диссипативной функции:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_D} &= \varepsilon_p \cdot (\dot{\varphi}_D - i_p \cdot \dot{\varphi}_T) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_T} &= -\varepsilon_p \cdot i_p \cdot (\dot{\varphi}_D - i_p \cdot \dot{\varphi}_T) \end{aligned} \right\}; \quad (8)$$

г) частные производные по скоростям от обобщенных координат:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_D} = \mathfrak{I}_D \cdot \dot{\varphi}_D, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_T} = \mathfrak{I}_{\text{ПР}} \cdot \dot{\varphi}_T; \quad (9)$$

д) дифференцирования по времени:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_D} \right) &= \mathfrak{I}_D \cdot \ddot{\varphi}_D, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_T} \right) &= \mathfrak{I}_{\text{ПР}} \cdot \ddot{\varphi}_T \end{aligned} \right\}; \quad (10)$$

е) обобщенные силы:

$$Q_D(\varphi_D) = M_D, \quad Q_T(\varphi_T) = -M_{\text{ПР}}. \quad (11)$$

Подставив определенные члены (3)–(11) в уравнение (1), получим систему дифференциальных уравнений движения машинного агрегата семяотводящего устройства в общем виде:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{I}_D \cdot \ddot{\varphi}_D &= M_D - c_p \cdot (\varphi_D - i_p \cdot \varphi_T) - \varepsilon_p \cdot (\dot{\varphi}_D - i_p \cdot \dot{\varphi}_T) \\ \mathfrak{I}_{\text{ПР}} \cdot \ddot{\varphi}_T &= c_p \cdot i_p \cdot (\varphi_D - i_p \cdot \varphi_T) + \varepsilon_p \cdot i_p \cdot (\dot{\varphi}_D - i_p \cdot \dot{\varphi}_T) - M_{\text{ПР}} \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

При исследовании динамических параметров семяотводящего устройства мы использовали динамическую механическую характеристику асинхронного электродвигателя. Эта характеристика учитывает, как электромагнитные переходные процессы пуска, так и установившееся движение, описываемое системой дифференциальных уравнений, содержащих составляющие вектора потокосцеплений статора и ротора при синхронной скорости вращения осей координат. Она имеет следующий вид [10]:

$$\left. \begin{aligned} M_D &= \frac{3 \cdot P \cdot K_r \cdot \omega_o}{2 \cdot \sigma \cdot x_s} (\psi_{x2} \cdot \psi_{y1} - \psi_{x1} \cdot \psi_{y2}) \\ \dot{\psi}_{x1} &= U_m \cdot \cos \gamma - \omega_o \cdot \alpha'_s \cdot \psi_{x1} + \omega_o \cdot \alpha'_s \cdot K_r \cdot \psi_{x2} + \omega_o \cdot \psi_{y1} \\ \dot{\psi}_{y1} &= U_m \cdot \sin \gamma - \omega_o \cdot \alpha'_s \cdot \psi_{y1} + \omega_o \cdot \alpha'_s \cdot K_r \cdot \psi_{y2} - \omega_o \cdot \psi_{x1} \\ \dot{\psi}_{x2} &= -\omega_o \cdot \alpha'_r \cdot \psi_{x2} + \omega_o \cdot \alpha'_r \cdot K_s \cdot \psi_{x1} + \omega_o \cdot \psi_{y2} - \dot{\varphi}_D \cdot \psi_{y2} \\ \dot{\psi}_{y2} &= -\omega_o \cdot \alpha'_r \cdot \psi_{y2} + \omega_o \cdot \alpha'_r \cdot K_s \cdot \psi_{y1} - \omega_o \cdot \psi_{x2} + \dot{\varphi}_D \cdot \psi_{x2} \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

где ψ_{x1}, ψ_{y1} – составляющие обобщенного вектора потокосцеплений статора по осям x и y , вращающихся с синхронной скоростью; ψ_{x2}, ψ_{y2} – составляющие обобщенного вектора по-

токосцеплений ротора по осям x и y ; $K_S = x_\mu / \alpha_S = 0.9356725$; $K_r = x_\mu / \alpha_r = 0.9039548$ – соответственно коэффициенты, равные отношению полного реактивного сопротивления взаимной индукции $x_\mu = 45.27143$ ом к полному реактивному сопротивлению статора x_S и ротора x_r ; α_S , α_r – соответственно коэффициенты, равные отношению полного активного сопротивления фазы статора $r_1 = 2.263571$ ом и ротора $r_2 = 2.348455$ ом к полному реактивному сопротивлению статора x_S и ротора x_r ($\alpha_S = r_1 / x_S = 0.04678362$; $\alpha_S' = \alpha_S / \sigma = 0.3034068$; $\alpha_r = r_2 / x_r = 0.04689265$; $\alpha_r' = \alpha_r / \sigma = 0.304114$; $\sigma = 1 - K_S \cdot K_r = 0.1541944$); $x_S = x_\mu + x_1 = 48.38384$ ом – синхронное реактивное сопротивление обмотки статора, учитывающее магнитную связь с двумя другими фазными обмотками статора; $x_r = x_\mu + x_2 = 50.08152$ ом – синхронное реактивное сопротивление обмотки ротора, учитывающее магнитную связь с двумя другими фазными обмотками статора; $x_1 = 3.112411$ ом – индуктивное сопротивление рассеяния обмотки статора; $x_2 = 4.810089$ ом – индуктивное сопротивление рассеяния обмотки ротора [9].

Далее определяем паспортные параметры и коэффициенты асинхронного двигателя (с целью унификации производства принимаем) *4A112MB8V3* [9]: $N = 3.0$ кВт – номинальная мощность двигателя; $n = 750$ об/мин – номинальное число оборотов ротора двигателя; $M_K = 77.95344$ Н·м – критический момент на валу ротора двигателя; $M_H = M_K / 2 = 38.97672$ Н·м – номинальный момент на валу ротора двигателя; $f_c = 50$ Гц – частота сети; $U_m = 220$ В – номинальное фазное напряжение; $\eta = 0.83$ – КПД двигателя; $\cos \varphi = 0.74$ – номинальный коэффициент мощности двигателя; $\omega_o = 78.53982$ с⁻¹ – синхронная частота вращения ротора двигателя; $\omega_n = 76.96902$ с⁻¹ – номинальная частота вращения ротора двигателя; $S_H = (\omega_o - \omega_n) / \omega_o = 0.02$ – номинальное значение скольжения двигателя; $S_K = 0.07464086$ – критическое значение скольжения двигателя; $P = 4$ – число пар полюсов; $I_{н.ф.} = 7.775324$ А – номинальный фазный ток.

Моменты инерции семяотводящего устройства и электродвигателя определяли методом разгона, применяемого для определения момента инерции тел вращения (рис. 3–4).

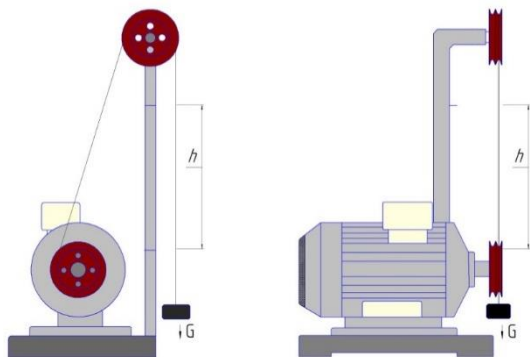


Рис. 3. Стенд для определения момента инерции электродвигателя

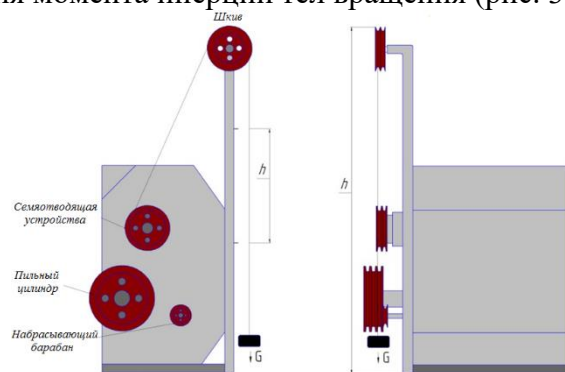


Рис. 4. Стенд для определения момента инерции семяотводящего трубы и шнека

Исследуемые рабочие органы установлены на подшипниках, поэтому опыты проводили непосредственно на пильном джине. Для этого на шкив наматывали нить с подвешенными на её конце грузами G_1 и G_2 . Эти грузы поднимали на высоту h . Из двух опытов с разными грузами с помощью видеосъемки фиксировали время падения t_1 и t_2 и определяли ускорение W_1 и W_2 . После этого из уравнения находили искомые моменты инерции рабочих органов семяотводящего устройства пильного джина:

$$\mathfrak{I} = \left(G_1 \cdot \left(1 - \frac{W_1}{g} \right) - G_2 \cdot \left(1 - \frac{W_2}{g} \right) \right) \cdot \frac{r^2}{(W_1 - W_2)}, \quad (14)$$

где $G = m \cdot g$ – сила тяжести, Н; m – масса груза, кг; $g = 9.81$ м/с² – ускорения свободного падения; r – радиус шкива, м; t – время опускания груза, с; h – высота опускания груза, м.

Ускорения падающих грузов устанавливали в виде

$$W_1 = \frac{2 \cdot h}{t_1^2}, \quad W_2 = \frac{2 \cdot h}{t_2^2}. \quad (15)$$

Результаты и анализ. Результаты экспериментов представлены в табл. 1–3.

На основе экспериментов для рабочих органов получены следующие моменты инерции: ротора двигателя (см.табл.1) со шкивом $\mathfrak{Z}_D=0.0378 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, семяотводящего устройства (см.табл. 2) со шкивами $\mathfrak{Z}_T=1.14 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ и шнека (см. табл.3) со шкивами $\mathfrak{Z}_{III}=0.02989 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

Таблица 1

Электродвигатель с шкивом при $h=1\text{м}$ и $r=0.065\text{ м}$

№ повторности	Масса груза m , кг	Сила тяжести грузов G , Н	Время опускания груза t , с	Ускорения падающих грузов W , $\text{м}/\text{с}^2$	Момент инерции электродвигателя \mathfrak{Z}_D , $\text{кг}\cdot\text{м}^2$
1	0.2	1.9612	4.72	0.0898	0.0381
	0.3	2.9418	3.21	0.1941	
2	0.3	2.9418	3.21	0.1941	0.0373
	0.4	3.9224	2.59	0.2981	
3	0.4	3.9224	2.59	0.2981	0.0379
	0.5	4.903	2.24	0.3986	
Среднее					0.0378

Таблица 2

Семяотводящие трубы при $h=1\text{м}$ и $r=0.095\text{ м}$

№ повторности	Масса груза m , кг	Сила тяжести грузов G , Н	Время опускания груза t , с	Ускорения падающих грузов, $\text{м}/\text{с}^2$	Момент инерции семяотводящего трубы \mathfrak{Z}_T , $\text{кг}\cdot\text{м}^2$
1	6	58.836	3.95	0.1282	1.1308
	6.5	63.739	3.26	0.1882	
2	6.5	63.739	3.26	0.1882	1.1569
	7	68.642	2.85	0.2462	
3	7	68.642	2.85	0.2462	1.1224
	7.5	73.545	2.56	0.3052	
4	7.5	73.545	2.56	0.3052	1.1496
	8	78.448	2.35	0.3621	
Среднее					1.140

Таблица 3

Шнек при $h=1\text{м}$ и $r=0.105\text{ м}$

№ повторности	Масса груза m , кг	Сила тяжести грузов G , Н	Время опускания груза t , с	Ускорения падающих грузов W , $\text{м}/\text{с}^2$	Момент инерции семяотводящего шнека \mathfrak{Z}_{III} , $\text{кг}\cdot\text{м}^2$
1	0.3	2.942	2.9	0.237812	0.03025
	0.35	3.432	2.25	0.395062	
2	0.35	3.432	2.25	0.395062	0.03002
	0.4	3.922	1.91	0.548231	
3	0.4	3.922	1.91	0.548231	0.02915
	0.45	4.413	1.69	0.700256	
4	0.45	4.413	1.69	0.700256	0.03014
	0.5	4.903	1.54	0.843313	
Среднее					0.02989

Жесткость ременных передач определяем по [11]:

$$c_p = \frac{a \cdot R^2 \cdot E \cdot F}{l_p}, \quad (16)$$

где a – коэффициент, учитывающий влияние предварительного натяжения для клиноременных передач при нормальной эксплуатации $a=2$; R – радиус шкива, м ; $E=42 \cdot 10^6 \text{ Н}/\text{м}^2$ – модуль упругости; F – площадь поперечного сечения ремня, м^2 ; l_p – длина ремня, м .

Для ремня (сечение В)

$$c_p = \frac{2 \cdot (0.065\text{ м})^2 \cdot (42 \cdot 10^6 \text{ Н}/\text{м}^2) \cdot (2.3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2)}{1.9} = 42.96 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}.$$

Коэффициенты демпфирования ременных передач [12, 13]:

$$\epsilon_p = \frac{\phi \cdot c}{2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot \pi / T)} = 0.012665 \cdot c \cdot T, \quad (17)$$

где $\phi=0.5$ – коэффициент для передаточных механизмов принимается в пределах $0.2 < \phi < 0.6$; T – период, c .

Для сечения ремня (сечение В)

$$\epsilon_p = 0.012665 \cdot 42.96 \text{ Н}\cdot\text{м/рад} \cdot 0.321 \text{ с} = 0.175 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с /рад}.$$

Технологические нагрузки. $M_c = M_{cp} + M_0 \cos(\pi \omega_c t + \varphi_{c0})$ (здесь $M_{cp} = 35.67 \text{ Н}\cdot\text{м}$; $M_0 = 3.33 \text{ Н}\cdot\text{м}$; $\omega_c = \pi \cdot 389 / 30 \text{ рад/с}$; t – время; φ_{c0} – начальная фаза) – средняя нагрузка, действующая на семяотводящее устройство. $M_{ш} = \frac{43Bm}{\dot{\phi}_{ш}} = \frac{43Bm}{\dot{\phi}_T \cdot i_3}$ – средняя нагрузка, действующая на шнек,

а $M_{пр} = M_c + \frac{M_{ш} \cdot \dot{\phi}_T}{i_3^2}$ – приведенная нагрузка к валу семяотводящего устройства.

Реализация уравнений движения машинного агрегата пильного цилиндра (12) с характеристикой приводного двигателя (13) позволила установить закономерность изменения движущего момента асинхронного электродвигателя (рис.5), угловой скорости ротора электродвигателя (рис. 6), потребляемой мощности электродвигателя (рис. 7) и угловой скорости семяотводящей трубы (рис. 8) и шнека (рис. 9) в функции времени.

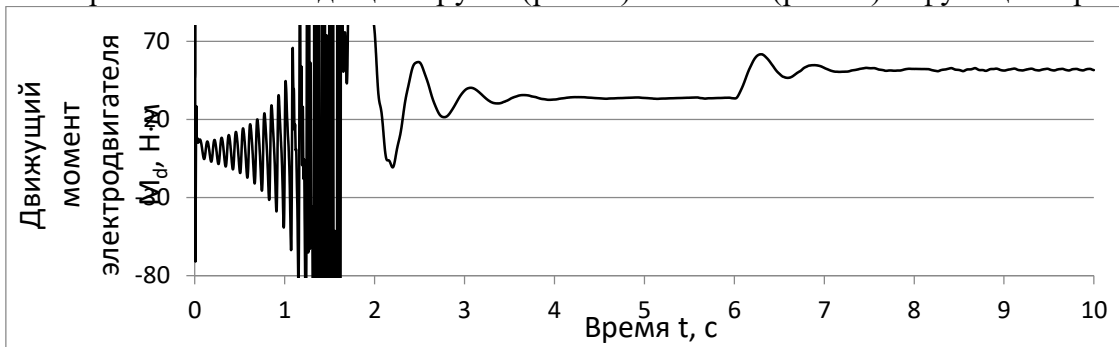


Рис. 5. Изменение движущего момента асинхронного электродвигателя в функции времени

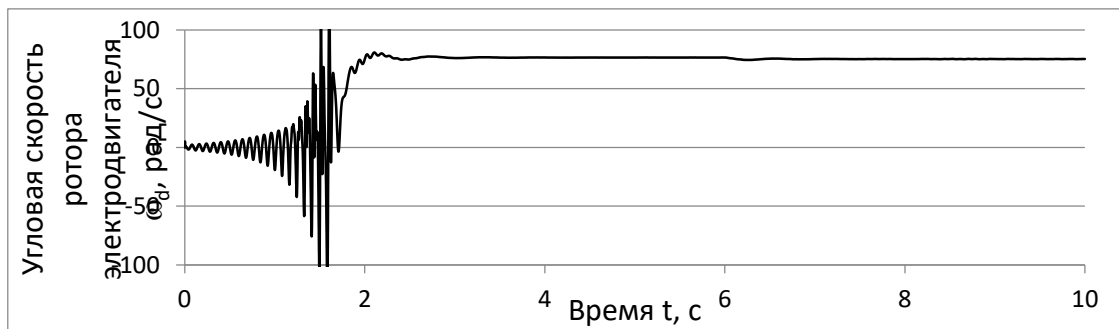


Рис. 6. Изменение угловой скорости ротора электродвигателя в функции времени

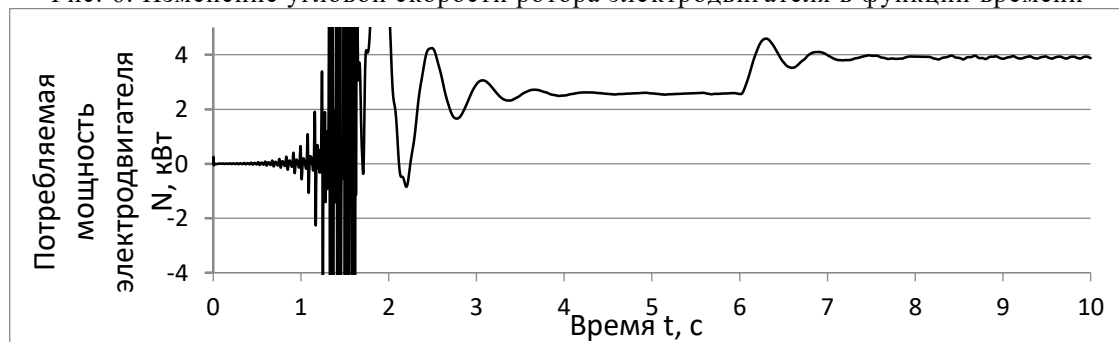


Рис. 7. Изменение потребляемой мощности электродвигателя в функции времени

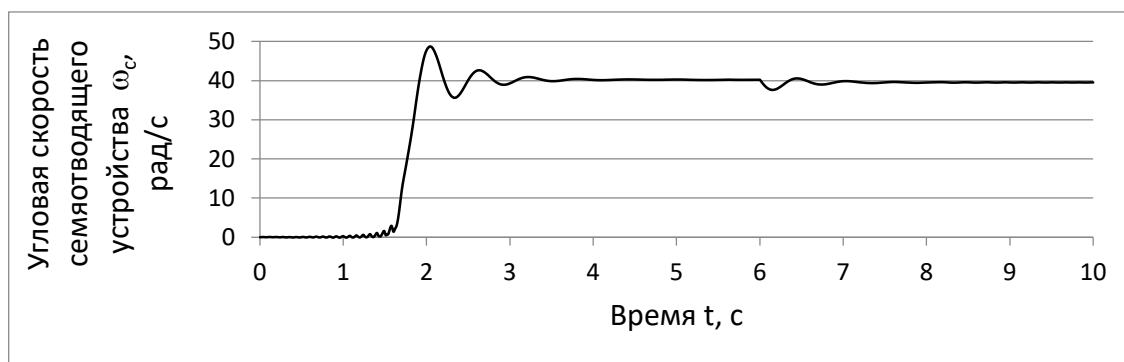


Рис. 8. Изменение угловой скорости семяотводящего устройства в функции времени

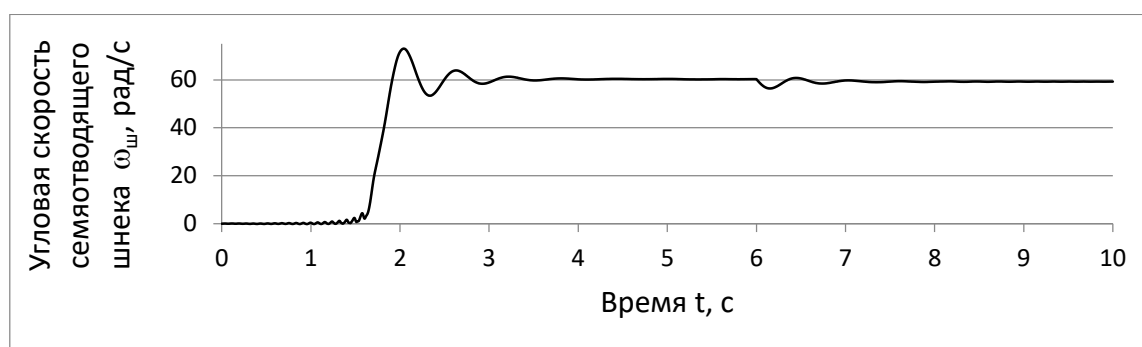


Рис. 9. Изменение угловой скорости семяотводящего шнека в функции времени

При этом использованы следующие параметры системы: технологическая нагрузка, действующая на вращающееся семяотводящее устройство $M_c = M_{cp} + M_0 \cos(\pi \omega_c t + \varphi_{c0})$ (здесь $M_{cp} = 35.67 \text{ Н}\cdot\text{м}$; $M_0 = 3.33 \text{ Н}\cdot\text{м}$; $\omega_c = \pi \cdot 389 / 30 \text{ рад/с}$; t – время; φ_{c0} – начальная фаза); упруго-диссипативные параметры ($c_p = 42.96 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ и $v_p = 0.175 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с/рад}$) ременной передачи, момент инерции электродвигателя ($\mathfrak{J}_D = 0.0378 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$), семяотводящей трубы ($\mathfrak{J}_T = 1.14 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$) и шнека ($\mathfrak{J}_Ш = 0.02989 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$).

Заключение.

В целом изучение машин в виде машинных агрегатов позволило установить динамику пуска электродвигателя и крутильных колебаний семяотводящего устройства с вращающимся шнеком. Изучение машинного агрегата семяотводящего устройства с вращающимся шнеком показало, что критический движущий момент электродвигателя составляет $657.92 \text{ Н}\cdot\text{м}$, переходный процесс протекает в течение 3.5 с , а максимальное значение угловой скорости семяотводящей трубы достигает 48.69 рад/с при $t = 2.04 \text{ с}$ с опозданием от электродвигателя на 0.4 с , так как максимальное значение угловой скорости электродвигателя достигает 130.51 рад/с при $t = 1.605 \text{ с}$. При этом максимальное значение угловой скорости семяотводящего шнека составляет 73.042 рад/с при $t = 2.04 \text{ с}$.

Литература

- [1] Rizaev A.A., Yuldashev A.T., Kuldoshev D.A. Model and calculation development of productivity of cotton harvesters // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2020. P. 919(3). 032013.
- [2] Rizaev A.A., Yuldashev A.T., Kuldoshev D.A., Abdillaev T., Ashurov N. Advance of spindle drum and frontality of active spindle surface // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2020. P. 883(1) 012157.
- [3] Parpiev A., Sharakhmedova M., Parpiev A. Analysis of deformation of Cotton in Technological processes Int. J of Emerging Trends in Engineering Research. 2020. N. 8(9). P. 6618–6622.
- [4] Bucinskas V., Sesok N., Sesok A., Iljin I., Sutinyas E., Subacius R., Bureika G., Warsza Z.L. Experimental Definition of Compressive Stiffness of Cotton Flock Challenges in Automation, Robotics and Measurement Techniques 2016. P. 881–891 Retrieved from: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-29357-8>.
- [5] Mukhammadiev D.M., Ibragimov F.K., Mukhammadiev T.D. Modeling the Motion of a Saw Ginning Machine J. of Machinery Manufacture and Reliability. 2020. N. 49(3). P. 256–262.

- [6] *Мухаммадиев Д.М.* Динамика машинных агрегатов пильного джина с семяотводящим устройством и конденсора-пульсирующим воздушным потоком: Дис. ... докт. техн. наук. Ташкент: 2014. – 211 с.
- [7] *Steinhauser J., Milan N.* Principles of Modelling of Machine Aggregates. Acta Technica Corviniensis – Bulletin of Engineering. 2015. N. 8(4). P. 57–59.
- [8] *Vulfson I.* Dynamics of Cyclic Machines. Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer. 2015. P. 410.
- [9] *Кравчик А.Э и др.* Асинхронные двигатели серии 4А. М.: Энергоиздат, 1982. – 504 с.
- [10] *Соколов М.М., Петров Л.П., Масандилов Л.Б., Ладензон В.А.* Электромагнитные переходные процессы в асинхронном электроприводе. М.: Энергия, 1967.– 200 с.
- [11] *Ривин Е.И.* Динамика привода станков. М.: Машиностроение, 1966.– 204 с.
- [12] *Вульфсон И.И., Коловский М.З.* Нелинейные задачи динамики машин. Л.: Машиностроение, 1968. – 282с.
- [13] Справочник. Динамика машин и управления машинами / Под ред. Крейнина Г.В. М.: Машиностроение, 1983. С. 39–42.

Дата поступления
24.01.2022 г.

Мухаммадиев Д.М., Ахмедов Х.А., Маллаев О.С., Жамолова Л.Ю. Айланувчи шнекли аррали жин чигитни чиқариш қурилмасининг машина агрегатини тадқиқ этиш

Аннотация: Мақолада айланувчи шнекли аррали жин чигит чиқариш қурилмасининг машина агрегати тадқиқот материаллари келтирилган. Аррали жиннинг чигит чиқариш қурилмаси машина агрегатининг ҳаракат тенгламалари тузилиб, электродвигатель ва айланувчи шнекли чигитни чиқариш қурилмасининг инерция моментлари тажриба йўли билан аниқланган. Чигитни чиқариш қурулининг бурчак тезлигининг максимал 48.69 рад/с қийматига $t=2.04$ с да етиб, электродвигателдан 0.4 с кеч қолиши ва чигитни чиқариш шнекнинг бурчак тезлигининг максимал қиймати 73.04 рад/с тенг эканлиги аниқланган.

Калим сўзлар: аррали жин; асинхрон двигатель; машина агрегати; ҳаракат тенгламаси; чигитни чиқарувчи қурилма; тешикли қувур; айланувчан шнек; тасмали ва тишли узатма; ҳаракатлантирувчи момент; айланиш частотаси; қувват сарфи.

Mukhammadiev D.M., Akhmedov Kh.A., Mallaev O.S., Jamolova L.Yu. Research of the machine unit of the seed device device of the saw gin with a rotating auger

Abstract: The article presents the research materials of the machine unit of the seed-removing device of the saw gin with a rotating auger. The equations of motion of the machine unit of the seed-removing device of the saw gin was compiled and the moments of inertia of the electric motor and the seed-removing device with a rotating screw were experimentally determined. It has been established that the maximum value of the angular velocity of the ejaculatory tube reaches 48.69 rad/s at $t=2.04$ s lagging behind the electric motor by 0.4 s, and the maximum value of the angular velocity of the ejaculatory auger is 73.04 rad/s.

Keywords: saw gin; asynchronous motor; machine unit; equations of motion; seed removal device; perforated pipe; rotating screw; belt and gear drive; driving moment; rotation frequency; power consumption.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ВЫБОРУ ПАРАМЕТРОВ УСТАНОВКИ ФОРСУНКИ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ МЕШАЛКЕ

Эсанов А.А., Акрамов А.А.

АО “Пахтасаноат илмий маркази” Ташкент, Узбекистан

E-mail: Anvarilm@mail.ru

Аннотация: В статье приведены результаты проведенных лабораторных опытов по выбору места и угла установки форсунки к разработанной цилиндрической мешалке. По результатам лабораторных опытов высота установки форсунки на корпусе цилиндрической мешалки выбрана равной 300 мм, угол ее установки в горизонтально-вертикальной плоскости выбран не менее 75° . Относительный радиус факела, на котором достигается максимальная относительная плотность орошения (суспензии), будет в пределах 250–500 мм.

Ключевые слова: форсунка; цилиндрическая мешалка; суспензия; радиус факела; орошение.

Введение. Проведенными исследованиями обоснованы основные параметры и режимы работы разработанного протравливателя опушенных посевных семян [1, 2]. Однако в разработанном протравливателе остались нерешенными следующие проблемы:

- происходит неравномерное и поверхностное нанесение суспензии препарата на поверхность семян, выпадающих из качающегося лотка. Поскольку известно, что толщина семян, выпадающих из качающегося лотка, увеличивается в зависимости от производительности работы, то при высокой производительности работы суспензия, вытекающая через форсунку, неравномерно падает только на поверхность семян, а внутренний слой суспензией очень плохо обрабатывается;

- основной нерешенной проблемой является снижение коэффициента использования суспензии из-за того, что в процессе распыления рабочей суспензии некоторая ее часть наносится на открытый участок протравки. Кроме того, следует указать на негативное влияние на санитарное состояние окружающей среды;

- также не изучен процесс распыления рабочей суспензии на принятую конструкцию распылителя.

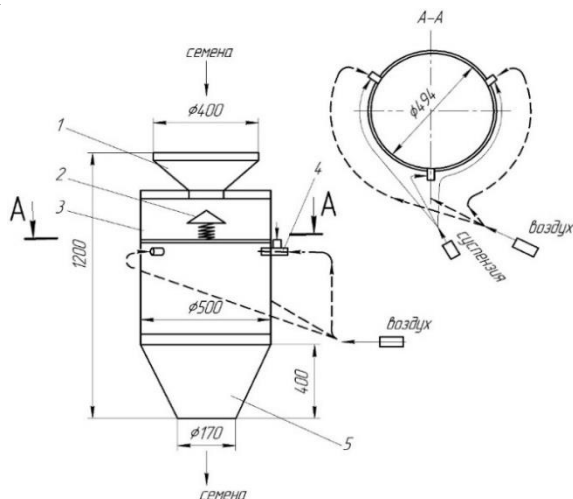


Рис. 1. Схема цилиндрической мешалки для семян с форсунками: 1–бункер; 2–разбрызгиватель семян; 3–цилиндрическая мешалка; 4–форсунка; 5–комфюзор

Задачей настоящей статьи является устранение вышеуказанных недостатков, обеспечение равномерности разбрызгивания рабочей суспензии по объему посевных семян.

Эта задача решается следующим образом. На вышеуказанный разработанный протравливатель семян [3] установлено дополнительное рабочее оборудование–цилиндрическая мешалка для семян (рис.1), а форсунки (предварительно намечается применение не менее трех форсунок) размещены радиально на том же цилиндрическом основании.

Методы. Лабораторные исследования проводились в лабораторных условиях АО“Пахтасаноат илмий

маркази”. При проведении лабораторных исследований использованы широко известные методы по определению основных характеристик разбрызгивания жидкостей форсунками (рис. 2) отечественных и зарубежных исследователей [4], с некоторыми корректировками, которые приведены кратко в настоящей статье.

Во время проведения лабораторных исследований на форсунку (рис. 3) подавалась рабочая суспензия с давлением 1.5 Па, в количестве, 1/3 части от рекомендуемого количества суспензии для протравливания посевных семян при производительности протравки 4 т/ч. Так как в предложенной автором системе распыления и перемешивания рабочей суспензии протравливателя намечается использование форсунок в количестве 3 шт. Расход рабочей суспензии протравливателя регулировался вентилем, установленным на расходном баке.

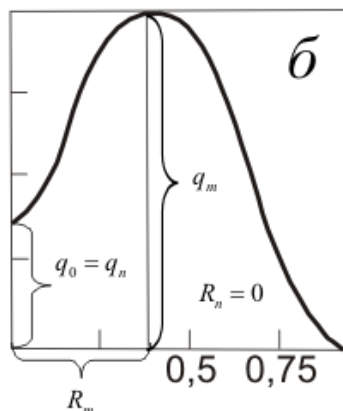


Рис. 2. Основные параметры распределения плотности орошения при центробежном распыливании форсункой с разработанной форсункой: q_0 – относительная плотность орошения на оси факела; q_m – максимальная относительная плотность орошения, достигаемая на периферии факела; R_m – относительный радиус факела, на котором достигается q_m ; q_n – минимальная относительная плотность орошения между двумя максимумами; R_n – относительный радиус, на котором достигается q_n

Угол установки форсунки в горизонтально-вертикальной плоскости установили в четырех вариантах – 20, 40, 60 и 80°. Повторность каждого варианта опытов трехкратная. Продолжительность каждой повторности опытов – 10 мин.

Ширина мерной посуды выбрана на 15–20 % больше, чем корневой угол факела и длина не менее чем от дальнобойности факела при угле установки форсунки 20°. Мерная посуда разделена на равные 5 частей (ячейки) по ее длине и имеет достаточный объем для размещения количества рабочей суспензии на одной повторности опыта.

Результаты. Для проведения опытов разработана схема и изготовлена форсунка (рис.3) в условиях экспериментального завода ООО «РИМ Устахонаси» при Научном центре.

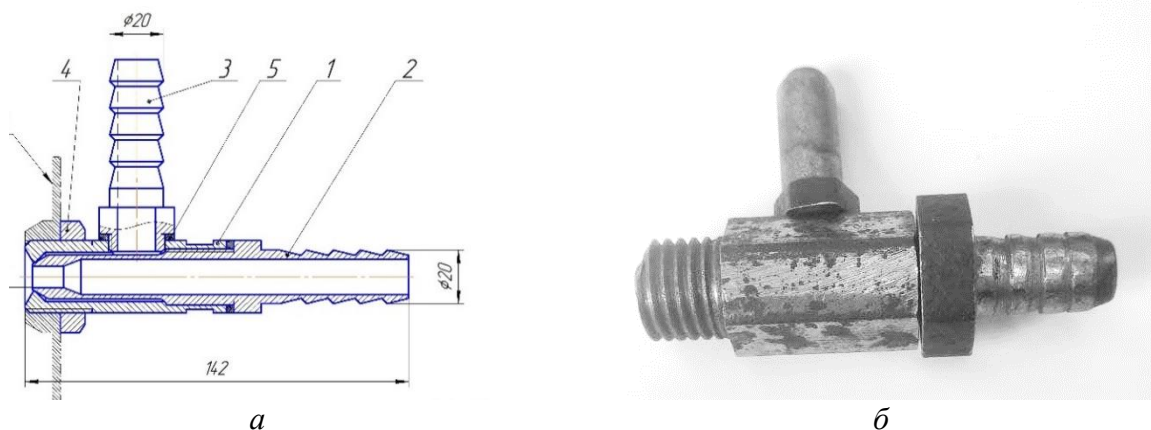


Рис. 3. Схема разработанной форсунки (а) и общий вид изготовленного экспериментального образца форсунки (б): 1– корпус; 2– шток; 3– штуцер; 4– контргайка; 5– прокладка

В этой статье приводятся результаты опытов по выбору высоты и угла установки форсунки на корпусе цилиндрической мешалки для обеспечения наилучшего разбрызгивания рабочей суспензии протравливателя.

Форсунка со стороны штока 2 соединяется с помощью гибкого шланга компрессором через вентиль, а со стороны штуцера 3 с помощью тоже гибкого шланга соединяется с расходным баком рабочей суспензии протравливателя через вентиль. Перед проведением опытов были отработаны параметры форсунки на качественный распил необходимого количества рабочей суспензии протравливателя. Задачей лабораторных исследований является определение зоны необходимой максимальной плотности орошения и дальности факела в зависимости от угла установки форсунки в горизонтально-вертикальной плоскости (см.рис. 2).

Лабораторная установка (рис. 4) состоит из расходного бака за ранее подготовленной рабочей суспензией протравливателя 1, компрессора 2 для создания необходимого напора воздуха, форсунки 3, установленной на штативе 4, экрана 5, посуды 6 для сбора распылённой рабочей суспензии. Форсунка 3 установлена на штативе 4 с возможностью регулировки угла установки в горизонтально-вертикальной поверхности и высоты форсунки от пола лабораторного цеха. Расход необходимого количества рабочей суспензии протравливателя регулируется с помощью вентиля установленного на расходном баке 1.

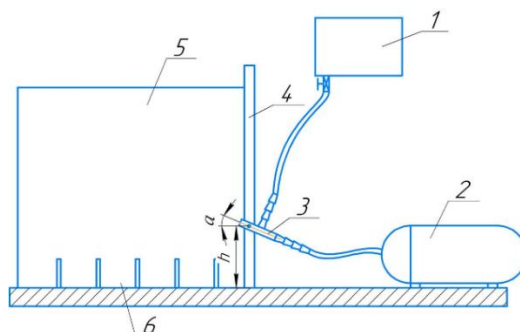


Рис. 4. Схема специально изготовленной лабораторной установки для определения параметров орошения рабочей суспензии форсунками: 1– бак для рабочей суспензии; 2– компрессор; 3– форсунка; 4– штатив; 5– экран; 6– посуда для сбора распылённой форсункой рабочей суспензии

Максимальные и минимальные относительные плотности орошения рабочей суспензии протравливателя, относительный радиус факела, на котором достигается максимальная относительная плотность орошения, определяются путем измерения количества суспензии, попадающей на каждую ячейку посуды для сбора суспензии 6 после распыления его форсункой 3. Результаты опытов приведены в таблице.

Результаты определения относительного радиуса факела R_m , на котором достигается максимальная относительная плотность орошения

Высота установки форсунки, мм	Угол установки форсунки, град.	Относительный радиус факела R_m , мм и плотность орошения, мл			
		0-250	250-500	500-750	750-1000
100	20	-	-	0.02-0.03	0.11-0.12
	40	-	0.02-0.03	0.09-0.1	0.001
	60	0.01	0.1-0.11	0.02-0.03	-
	80	0.01-0.02	0.1-0.11	0.02	-
200	20	-	0.01-0.02	0.04-0.05	0.09-0.1
	40	-	0.04	0.09-0.11	-
	60	0.01	0.1-0.11	0.01-0.02	-
	80	0.02	0.1-0.11	0.01-0.02	-
300	20	-	0.03-0.04	0.9-0.1	0.001
	40	-	0.05-0.06	0.08-0.09	-
	60	0.001	0.9-0.1	0.03-0.04	-
	80	0.002	0.11-0.12	0.001	-

Анализ. Как следует из данных таблицы, наиболее приемлемый относительный радиус, при котором достигается максимальная плотность орошения, получается в пределах 250–500 мм при высоте и угле установки форсунки соответственно 300 мм и не менее 70° .

Заключение. По результатам лабораторных опытов высота установки форсунки на цилиндрической мешалке выбрана равной 300 мм, угол ее установки в горизонтально-вертикальной плоскости выбрана не менее 70° , и при этом R_m – относительный радиус факела, при котором достигается q_m – максимальная относительная плотность орошения будет в пределах 225 – 400 мм.

Литература

- [1] Акрамов А.А., Джуроев А. Анализ малых колебаний лотка протравительной установки посевных опушенных семян хлопка // ФарПИ илмий-техника журнали. 2020. Т. 24, №4. С.139–143.
- [2] DJamolov R.K., Sheratiev Sh.E. Scientific and practical basis for the creation of cotton seed preparation technology// International Journal of Mechanical and Production Engineering Research and Development (IJMPERD) ISSN (P): 2249-6890; ISSN (E): 2249-8001 Vol. 10. Issue 3. Jun 2020, 9592-9536. (SCOPUS Indexed Journal).
- [3] Кулиев Т.М., Эсанов А.А. и др. Смеситель с протравлением посевных семян. Патент на полезную модель № FAP 01596, 31.03.2021 г.
- [4] Хавкин Ю.И. Центробежные форсунки. Л.: Машиностроение, 1976. –168 с.

Дата поступления
13.12.2021

Эсанов А.А., Акрамов А.А. Цилиндрик аралаштиргичда сачратқични (форсунка) ўрнатиш параметрларини танлаш тадқиқоти натижалари

Аннотация: Мақолада ишлаб чиқилган цилиндрлик аралаштиргичга сачратқич (форсунка) ни ўрнатиш жойи ва бурчагини танлаш бўйича лаборатория тажрибалари натижалари келтирилган. Лаборатория тажрибалари натижаларига кўра цилиндрлик аралаштиргич корпусига сачратқични ўрнатиш баландлиги 300 мм, горизонтал-вертикал текисликда ўрнатиш бурчаги камида 75° танланди ва шу билан бирга максимал нисбий сугориш (суспензия) зичлигига эришиладиган сепининг нисбий радиуси 250-500 мм бўлади.

Калим сўзлар: сачратқич; цилиндрлик аралаштиргич; суспензия; факел радиуси; сугориш.

Esanov A.A., Akramov A.A. Results of investigations on the selection of the installation parameters of a nozzle on a cylindrical mixer

Annotation: The article presents the results of laboratory experiments on the choice of the place and angle of installation of the nozzle to the developed cylindrical mixer. According to the results of laboratory experiments, the installation height of the nozzle on the body of the cylindrical mixer was chosen 300 mm, the angle of its installation in the horizontal-vertical plane was not less than 75° , and the relative radius of the torch, on which the maximum relative density of irrigation (suspension) is reached, will be within 250– 500 mm.

Keywords: nozzle; cylindrical stirrer; suspension; flame radius; irrigation.

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО НОВОГО ФУТЕРНОГО ТРИКОТАЖА

Убайдуллаева Д.Х.¹, Шумкорова Ш.П.², Абдурахимова М.М.¹, Бегманова И.А.¹

¹Ташкентский институт текстильной и легкой промышленности. Ташкент, Узбекистан

²Джизакский политехнический институт. Джизак, Узбекистан

E-mail: Begmanov78@gmail.com

Аннотация: В статье приведены результаты исследования влияния новой структуры футерного переплетения трикотажного полотна из хлопчатобумажной пряжи различной линейной плотности на физико-механические, деформационные свойства. Рекомендован оптимальный вариант для выработки трикотажных полотен в производственных условиях.

Ключевые слова: переплетения; футер; воздухопроницаемость; разрывное удлинение; разрывная нагрузка; деформационное свойство.

Введение. Сегодня создается ряд возможностей и условий для развития отрасли с целью повышения эффективности производственных мощностей и обеспечения высоких и устойчивых темпов роста. Несмотря на очевидные достижения в развитии текстильной промышленности, ее вклад в экономический рост страны все еще намного ниже существующего потенциала. Это, в свою очередь, нацелено на ученых и ряд производителей текстильной промышленности.

Для повышения конкурентоспособности трикотажных изделий необходимо создавать способы получения качественных изделий с использованием новых современных технологий в их ассортименте. При этом одной из важных задач является дальнейшее расширение технологических возможностей вязальных машин и создание различных видов трикотажных полотен.

В настоящее время футерное трикотажное полотно широко используется, в основном, для теплоизоляции нижнего белья благодаря своим теплоудерживающим свойствам. Поверхность таких фактур гладкая, без структурного или узорного эффекта. Футерный трикотаж не находит широкого применения для производства весенне-летнего верхнего ассортимента, специального (медицинского, технического) текстиля, так как расположение футерной нити в грунте переплетения утяжеляет ткань и снижает воздухопроницаемость.

Таким образом, целью исследования является снизить расход сырья при сохранении гигиенических и эстетических свойств изделия, добавить дополнительные элементы в структуру трикотажа, улучшить его свойства и качество, произвести ассортимент импортозамещающих, конкурентоспособных, эффективных отечественный и зарубежный ассортимент трикотажного полотна. Одной из важных задач является повышение покупательной способности и достижение экономической эффективности, а также его использование в производстве специального (медицинского, технического) трикотажа.

Правильный выбор сырья – гарантия качества продукции. Основной этап в определении и контроле характеристик полотен, производимых на трикотажных предприятиях, типа полотен, содержания волокна, структуры и количества петельных элементов, качества изделий из нее.

Материалы и методы. Объектом исследования служило футерное трикотажное полотно, связанное на кругловязальных машинах TERROT. Физико-механические свойства вновь созданных полотен были экспериментально проанализированы на современном оборудовании, установленном в аттестационной лаборатории «CENTEXUZ» при ТИТЛП. Были проведены исследования для определения таких свойств, как воздухопроницаемость, истирание, разрывная нагрузка, разрывное удлинение, растяжимость, деформация. Физико-механические свойства образцов футерного трикотажа определены экспериментально по стандартным методикам. Полученные результаты приведены в таблице.

Образцы берутся из каждой партии. Из общей партии для эксперимента отбирают 5 проб, т. е. не менее 5%, из каждой выбранной партии отбирают по две пробы: одну для определения влажности, а другую – для определения физико-механических свойств.

Для определения физико-механических свойств трикотажного полотна всю ширину полотна снимают с любой части полотна, оставляя 1.5 м от края полотна. Использована методы определения линейных размеров и влажности по ГОСТу 8844-85.

Измерения производятся с точностью до 0.5 см на одинаковом расстоянии в 10 точках.

Результаты. Истирание определяют по ГОСТу 12739-85. С куска полотна берут не менее 3 образцов для определения ее устойчивости к истиранию. Для определения стойкости к истиранию трикотажных полотен используется колпачок оборудования малого диаметра 30 мм. Скорость вращения насадки и абразивной ткани – 150 об / мин. Давление составляет 250 мм рт.ст. растяжение образца осуществляется с нагрузкой 200 г.

Предел прочности трикотажных полотен производится по ГОСТу 8847-85. Для определения разрывной нагрузки отрезки длиной 50x200 мм выполняется в поперечном и продольном направлениях. При вырезании шаблон вырезается точно по петельному столбику и петельному ряду. Разрывную нагрузку трикотажного полотна определяют на приборе АГ-1.

Расстояние между зажимами – 100 мм, нижний зажим активен. Инструмент также определяет разрывное удлинение.

Значения полученных образцов проанализированы в таблице, истирание находится в диапазоне от 17 600 до 25 000. В футерных трикотажных изделиях этот показатель колеблется в пределах 29.6%, что в свою очередь дает информацию о прочности и сроке службы трикотажного полотна. Наивысшее значение истирания в варианте 2, который рекомендуется использовать на участках с повышенным трением (см.таблицу).

Физико-механические свойства футерного трикотажа

Варианты	6 N		Воздухопроницаемость см ³ /см ² с	Истирание, цикл	Разрывная нагрузка Рр, N		Разрывное удлинение L, %		Пластическая деформация, %		Эластическая деформация, %		Упругая деформация, %	
	по вертикали	по горизонтали			по вертикали	по горизонтали	по вертикали	по горизонтали	по вертикали	по горизонтали	по вертикали	по горизонтали	по вертикали	по горизонтали
I	3.67	2.97	74.8	24100	265	224	162.3	111	9	8.6	5.6	7	35.6	38
II	3.99	6.83	30.2	25100	264	142.6	175.6	162.3	3.3	3	3.6	2.6	53	35
III	1.88	17.66	152	17600	230.3	106	72.3	312	4.62	5.3	3.6	4.6	22.3	26.3

Анализ. Значения полученных образцов проанализированы на прочность. Разрывная нагрузка по вертикали и по горизонтали во время исследования показаны на диаграмме для футерного трикотажного полотна, приведенной на рис. 1,2. Предел прочности при продольном растяжении составляет 230.3–265 Н, а поперечный предел прочности – 106–224 Н. Он варьируется по высоте на 13% и по ширине на 52.7%. Показатели прочности на сдвиг этих вариантов относительно стабильны. Скорость сдвига сильно различается. Основная причина заключается в том, что нижняя пряжа по-разному расположена в структуре ткани в зависимости от отчета. Однако варианты производятся с использованием сырья разного состава. Вариант 1, имеющий наивысшую прочность на сдвиг, может быть рекомендован как вариант с максимальной прочностью по ширине.

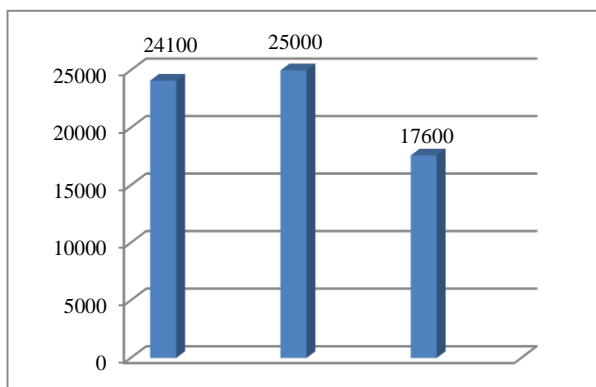


Рис.1. Истирание

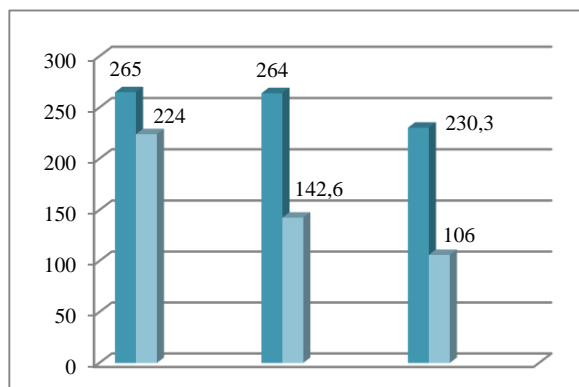


Рис.2. Разрывная нагрузка

Результаты исследования разрывного удлинения показывают, что удлинение по вертикали составляло 72.3–175.6% по сравнению с удлинением футерного трикотажного полотна, а удлинение по горизонтали – 111–312%. Оно варьирует по высоте на 58.8% и по ширине на 64.4% (рис. 3).

Чем ниже показатель разрывного удлинения, тем выше способность трикотажа сохранять форму. В качестве образца с максимальной способностью удерживать форму можно рекомендовать 3 варианта и 1 вариант.

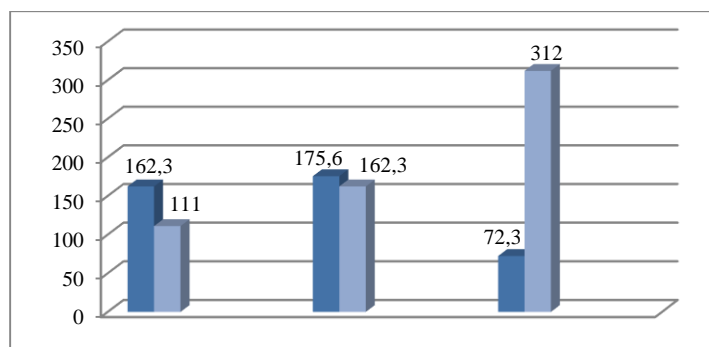


Рис. 3. Разрывное удлинение

Если проанализировать результаты удлинения, удлинение по вертикале составило 1.88–3.99% по сравнению с удлинением первого варианта трикотажного полотна, а удлинение по горизонтали составило 2.97–17.66%. Изменение удлинения в продольном направлении составляет 53%, а изменение удлинения по ширине – 83%.

Следует отметить, что такое трикотажное полотно подходит для разной верхней, спортивной и детской одежды. На основе анализа результатов растяжения и удлинения (6N) установлено, что трикотаж обладает высокой способностью удерживать форму, и эта ткань рекомендуется для производства детских, женских и мужских верхних трикотажных изделий.

По результатам исследования образцы сравнивали друг с другом, продольная деформация спинки составила 22.3–53%, а деформация ширины спинки – 26.3–38%. Изменение удлинения в продольном направлении составляет 58%, а изменение удлинения по ширине – 31% (рис.4).

При этом скорости деформации по вертикали изменяются в несколько большем диапазоне, в результате чего скорости деформации по длине ткани не достигают стабильного состояния.

Если параметры деформации ширины образцов ткани проанализированы, то параметры деформации ширины эластичных образцов относительно стабильны, а

дополнительные внешние кольца, включенные в структуру ткани, позволяют ей принимать состояние равновесия вдоль рядов колец.

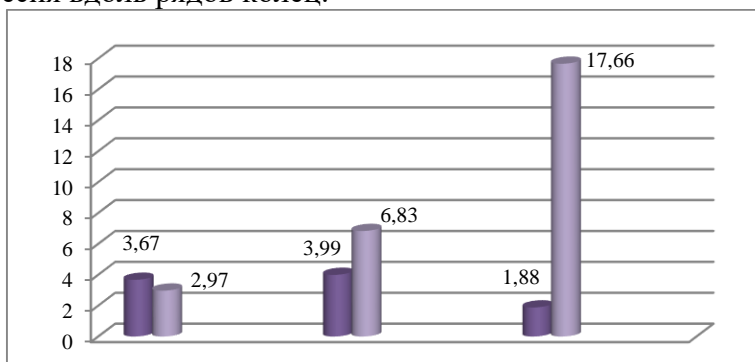


Рис. 4. Растяжимость трикотажа

В результате анализа параметров деформации варианты 1 и 3 могут быть рекомендованы как несколько более высокий вариант по длине и ширине свойства деформации.

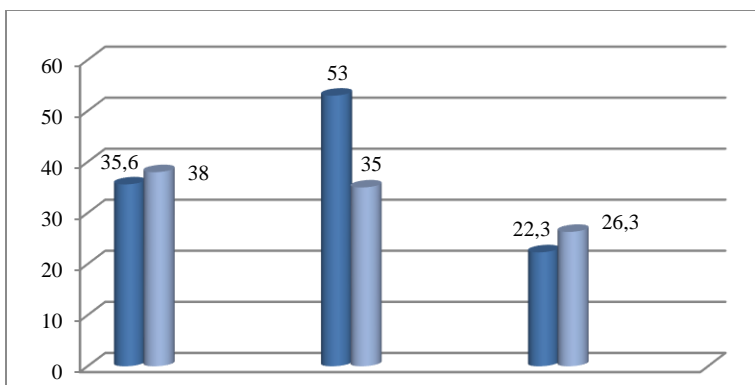


Рис. 5. Упругая деформация

По результатам исследования при сравнении образцов между собой упругая деформация по вертикали составила 3.6–5.6%, а упругая деформация по горизонтали – 2.6–7%. Изменение удлинения в продольном направлении составляет 35%, а изменение удлинения по ширине – 63% (рис. 5).

При этом значения упругой деформации по горизонтали изменяются в несколько большем диапазоне, в результате чего следует отметить, что показатели деформации по горизонтали полотна не достигли устойчивого состояния.

Если анализируются показатели упругой деформации по горизонтали образцов полотна, то рекомендуется вариант 2 как вариант с наименьшим значением с точки зрения показателей упругой деформации, при этом дополнительные наброски, входящие в состав полотна, позволяют ей находиться в равновесии по петельным рядам.

В результате анализа параметров упругой деформации варианты 2 и 3 могут быть рекомендованы как более выгодные по длине и ширине деформируемого свойства.

По результатам исследования при сравнении образцов между собой пластическая деформация по вертикали составила 3.3–9%, а пластическая деформация по горизонтали – 3–8.6%. Изменение удлинения в продольном направлении составляет 63%, а по горизонтали – 70%.

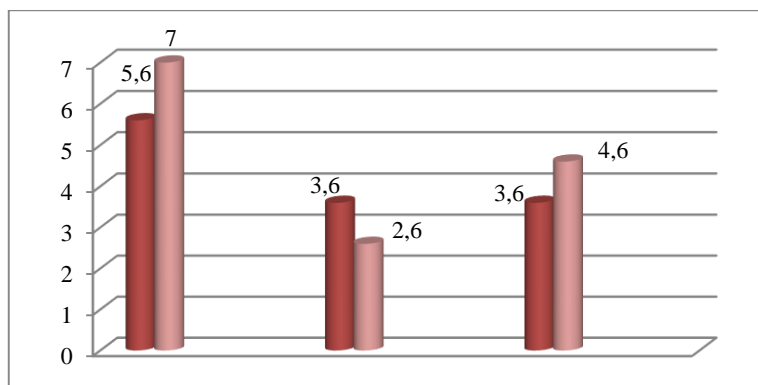


Рис. 6. Эластическая деформация

По результатам анализа показателей упругой деформации по ширине образцов полотна рекомендуется вариант 2 как вариант с наименьшим значением по горизонтали упругой деформации, дополнительные наброски, входящие в структуру полотна, позволяют ей занимать состояние равновесия по петельным рядам (рис.6).

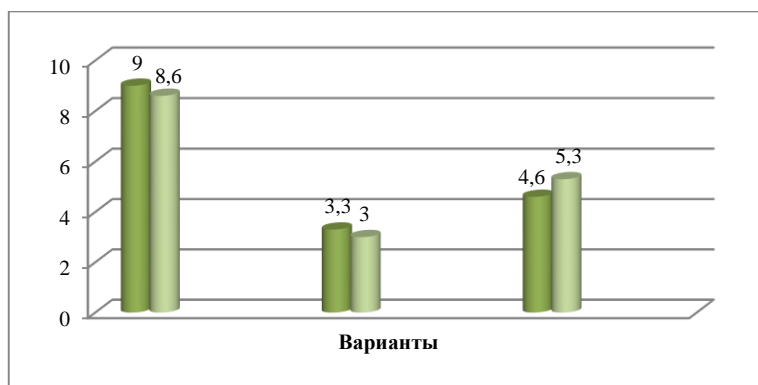


Рис. 7. Пластическая деформация

В результате анализа параметров пластической деформации все варианты могут быть рекомендованы как несколько приемлемые варианты по горизонтали и по вертикали деформируемого свойства (рис. 7).

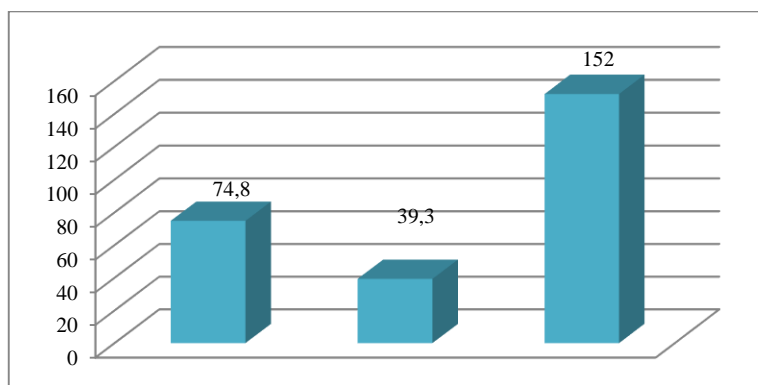


Рис. 8. Воздухопроницаемость

По результатам исследования, при сравнении образцов между собой вариант 3 по воздухопроницаемости имел высокие показатели (рис.8), который можно рекомендовать для ассортиментов, требующих высоких значений воздухопроницаемости.

Заключение. По результатам анализа влияния расположения футерной нити на физико-механические свойства футерного трикотажного полотна в составе вновь сформированного выяснилось, что место их использования можно определить по виду сырья [1–3].

Одним из основных и наиболее трудоемких способов расширения ассортимента трикотажных полотен является разработка трикотажного полотна с новой структурой, сформированной целенаправленным использованием продукта, обеспечивающим новые характеристики или высокие показатели качества [4–5].

С целью обеспечения потребности населения в теплой одежде в ходе исследования были изучены способы получения высокоэффективного трикотажного полотна на основе футерного трикотажа, и на этой основе было разработано новое футерное трикотажное переплетение [6,7].

Литература

- [1]. М.М. Мукимов. Кулирный плюшевый трикотаж. М.: Легпромбытиздат, 1991. – 22 с.
- [2]. Кудрявин Л.А., Шалов И.И. Основы технологии трикотажного производства. М.: Легпромбытиздат, 1991. – 98 с.
- [3]. Shima Seiki Mfg, Ltd, Okuni Masao (wagner& Geyer Gewurzmuhlstrasse 5 D-80538 Munchen). Способ выработки трикотажного полотна с рисунком интарзия. №02785946.1 Заявл. 22.11.2002. Опубл. 29.09.2004. № 2001359741 (Япония). Англ.
- [4]. Соловьев А.Н., Кирюхин С.М. Оценка и прогнозирование качества текстильных материалов. М.: Световая и кулинарная промышленность, 2008. – 145 с.
- [5]. Hanhadjaeva N., Mukimov M. New Knitting Fabric Structure Made on Flat-Bed Knitting Machine. The Second International Symposium on Educational Cooperation for “Industrial Technology Education” 4.07-6.07.2008. P. 353–364.
- [6]. Торкунова З.А. Испытания трикотажа. М.: Легкая индустрия, 1985. – 86 с.
- [7]. Мукимов М.М., Исабоев А.Э., Убайдуллаева Д.Х. Исследование влияния структуры двуизнаночного переплетения на параметры прессового трикотажа // Ж. “Проблемы текстиля” 2005. № 2. 102–103с.

Дата поступления
18.12.2021

Убайдуллаева Д.Х., Шумкорова Ш.Р., Абдурахимова М.М., Бегманова И.А. Янги тузилишли футер трикотаж тўқимасининг физик-механик хусусиятлари

Аннотация: Мақолада пахта ипидан тўқилган янги таркибли футер трикотаж тўқимасининг физик-механик, деформация хусусиятларига ҳар хил чизиқли зичликдаги ипларнинг таъсири тадқиқ қилинган ва ишлаб чиқаришга мақбул вариантлар тавсия этилган.

Калим сўзлар: тўқима; футер; иссиқлик сақлаш хусусияти; ҳаво ўтказувчанлик; узилишдаги узайиш; узилишдаги мустаҳкамлиги; деформацион хусусиятлар.

Ubaydullaeva D.Kh., Shumkorova Sh.P., Abduraximova M.M., Begmanova I.A. Study of the physical and mechanical properties of the new footer jersey.

Abstract: The article presents studies of the influence of the new structure of the footer weave of a knitted fabric from cotton yarn of various linear densities on the physical, mechanical, deformation properties and recommends the best option for the production of knitted fabrics in production conditions.

Key words: weaves; footer; heat-retaining property; air permeability; breaking elongation; breaking load; proportion of deformation.

СОДЕРЖАНИЕ

А.Б. Ахмедов Решение пространственных задач теории упругости в потенциалах напряжений..	3
З. Сирожиддинов Особенности определения несущей способности забивных свай.....	16
З. Уразмухамедова, Д. Жураев, П. Маткаримов Определение собственных частот и форм колебаний плотин.....	25
С.И. Умархонов, Ш.И. Норматов, О.М. Хайдарова. Методики определения параметров круглоцилиндрической поверхности скольжения и оценки устойчивости грунтовых откосов.....	33
М.У.Ходжабеков Нелинейные колебания упругого стержня с жидкостным гасителем.....	42
Р. Б. Хусаинов. Колебания подземных трубопроводов при нелинейном взаимодействии с грунтом.....	52
К. Мамасолиев, Ж.Синдаров, Э.Тошматов. Оценка внутренних силовых факторов в многослойных балочных плитах на упругом основании.....	62
З.М. Маликов, Ф.Х. Назаров, З.Ж. Омонов, С.К. Абдухамидов. Численное исследование течения в плоском внезапно расширяющемся канале на основе новой двух-жидкостной модели турбулентности и модели Уилкокса.....	71
Д.П. Наврузов. Численный анализ вихревых течений после внезапного расширения трубы с различными диаметрами.....	78
Р.Д. Матчанов, А.Т.Йулдашев, Д.А.Кулдошев, Н.Б. Джураева. Повышение эффективности работы комбинированной ХУМ в вертикально-шпиндельном исполнении.....	84
Д.М. Мухаммадиев, Х.А. Ахмедов, О.С. Маллаев, Л.Ю. Жамолова. Исследование машинного агрегата семяотводящего устройства пильного джина с вращающимся шнеком.....	92
А.А. Эсанов, А.А. Акрамов. Результаты исследований по выбору параметров установки форсунки на цилиндрической мешалке.....	100
Д.Х. Убайдуллаева, Ш.П. Шумкорова, М.М. Абдурахимова, И.А. Бегманова. Физико-механический свойство нового футерного трикотажа.....	104

МУНДАРИЖА

А.Б. Ахмедов. Потенциал кучланишларда эластиклик назариясининг фазовий масалаларини ечиш.....	3
З. Сирожиддинов. Қоқилган қозикларни юк кўтариш қобилиятини ўзига хос хусусиятларини аниқлаш.....	16
З. Ўразмухаммедова, Д. Жўраев, П.Ж. Маткаримов. Тўғонларнинг хусусий частоталари ва тебраниш формаларини аниқлаш.....	25
С.И. Умархонов, Ш.И. Норматов, О.М. Хайдарова. Доиравий цилиндрлик силжиш сирти параметрларини аниқлаш ва грунтли қияликларнинг устуворлигини баҳолаш усуллари.....	33
М.У. Ходжабеков. Эластик стерженнинг суюқлик бўғинли динамик сўндиргич билан биргаликдаги ночизикли тебранишлари.....	42
Р.Б. Хусаинов. Ер ости қувурининг грунт билан чизиксиз ўзаро таъсиридаги тебраниши.....	52
К. Мамасолиев, Ж. Синдаров, Э. Тошматов. Эластик асосдаги кўп қатламли тўсин плитасини ички куч факторларини баҳолаш.....	62
З.М. Маликов, Ф.Х. Назаров, З.Ж. Омонов, С.К. Абдухамидов. Янги икки суюқлик ва Уилкокк турбулентлик моделлари асосида тўсатдан кенгайган текис каналдаги оқимини сонли усулда ўрганиш.....	71
Д.П. Наврузов. Тўсатдан кенгайишдан кейинги ҳар хил диаметрли қувурларда уюрмали оқимнинг сонли тадқиқоти.....	78
Р.Д. Матчанов, А.Т. Йулдашев, Д.А. Кулдошев, Н.Б. Джураева. Вертикал-шпинделли комбинациялашган ПТМ нинг иш самарадорлигини ошириш.....	84
Д.М. Мухаммадиев, Х.А. Ахмедов, О.С. Маллаев, Л.Ю. Жамолова. Айланувчи шнекли аррали жин чигитни чиқариш қурилмасининг машина агрегатини тадқиқ этиш.....	92
А.А. Эсанов, А.А. Акрамов. Цилиндрлик аралаштиргичда сачратқични (форсунка) ўрнатиш параметрларини танлаш тадқиқоти натижалари.....	100
Д.Х. Убайдуллаева, Ш.П. Шумкорова, М.М. Абдурахимова, И.А. Бегманова. Янги тузилишли футер трикотаж тўқимасининг физик-механик хусусиятлари.....	104